第 57 卷 第 3 期 2004 年 5 月
武汉大学学报(人文科学版)
Wuhan University Journal (Humanity Sciences)
Vol.57.No.3 May 2004.333 ~337

● 哲理逻辑

现行联合演算的判定标准不可靠的理由

马 雷
(东南大学 哲学与科学系,江苏 南京 210096)

[作者简介] 马 雷(1965-),男,安徽舒城人,东南大学哲学与科学系教授,哲学博士,主要从事逻辑学研究。

[摘 要] 希尔柏脱和阿克曼试图导出一个普遍可行的判定标准,判定一联合演算公式是否永真。克劳斯用这个标准来论证传统推论式并排除不正确的推理式。但是,由希尔柏脱和阿克曼提出并经克劳斯转述的所谓联合演算的"判定标准"并不是一个十分可靠的标准。联合演算的最特殊的方面是,其演算不可能在单一的层次上进行,必须在两个层次上同时进行。第一个层次是命题逻辑的层次,第二个层次是谓词逻辑或类逻辑的层次。希尔柏脱和阿克曼试图在第一个层次上解决问题,克劳斯则承袭其思路,总是想把一联合演算的公式化为使其竖号在公式最外面的形式,然后在判定过程中脱去竖号。忽视联合演算的两个层次,正是现行联合演算出现混乱和错误的根源。

[关 键 词] 希尔柏脱和阿克曼;克劳斯;联合演算;判定标准
[中图分类号] B815 [文献标识码] A [文章编号] 1671-881X(2004)03-0333-05

一

希尔柏脱和阿克曼在《数理逻辑基础》中认为,联合演算的最重要的问题,是找出一个形式的审定法,以此决定哪一个公式是表示永真的命题联系,即把其中出现的谓词记号或类记号给以任意的意义后,它均为真的,并且对于与类演算有关的所谓客体区域,假定其中至少含有一个元素。他们提出,要解决这一问题,首先得把每一公式都经过等价变形而变成一定的范式。这时,每个公式都由一些用两根竖线限起来的命题借助于命题联结词构成。由这一命题所组成的复合命题可展开而得命题演算中的合取范式。要使得这个合取范式对于一切谓词均表示一个真命题,必要而充分的是,每个合取项都是真命题。这个问题可以归结为:一个形如 $\neg\ |B_1| \vee \neg\ |B_2| \vee \cdots \vee \neg\ |B_m| \vee |C_1| \vee |C_2| \vee \cdots \vee |C_n|$ 的析取式在什么情形下永真?回答是,这样的析取式永真,当且仅当在命题 $|\neg B_1 \vee \cdots \vee \neg B_m \vee C_1|$, …, $|\neg B_1 \vee \cdots \neg B_m \vee \cdots \vee C_n|$ 中至少有一个是永真的(m=0 或 n=0 的情形也包括在内)。至于后面这些命题在什么时候永真,其判定方法是:在两根竖线之内作出合取范式。

格·克劳斯把上述判定一联合演算公式是否永真式的方法称为"判定标准"[1](第 267 页)。克劳斯将这个标准用来论证传统推论式并排除不正确的推理式。应用于直接推理,克劳斯举过的例子有:

(1)SEP→PES.用符号表示为 $|\neg S \vee \neg P| \rightarrow |\neg P \vee \neg S|$。由于析取的交换性,可得出 $|\neg S \vee \neg P| \rightarrow |\neg S \vee \neg P|$ 或 $\neg\ |\neg S \vee \neg P| \vee |\neg S \vee \neg P|$。这是具有 X→X 或 ¬X∨X 形式的永真命题联系。

收稿日期:2003-12-05

(2)SAP→SIP. 用符号表示为 $|\neg S\vee P|\rightarrow\neg|\neg S\vee\neg P|$。按标准，这看来永真的推理式似乎不适用，因为继续交换的结果得不出永真联系。原因在于这种推理并不是对任何一个S类都是正确的，如果S是零类而P不是零类，它就不正确。所以，必须添加一个前提，即断定S不是零类，亦即 $\neg|\neg S|$。这就得到推理式 $\neg|\neg S|\wedge|\neg S\vee P|\rightarrow\neg|\neg S\vee\neg P|$。化为标准式：$\neg|\neg S\vee P|\vee\neg|\neg S\vee\neg P|\vee|\neg S|$，即 $\neg(\neg S\vee P)\vee\neg(\neg S\vee\neg P)\vee\neg S$。按标准，这个表达式的前面两项，相当于 P_1 和 P_2，最后一项相当于 S_1，其他的 P_i 和 S_i 都没有。在合取范式的 $|\neg P_1\vee\cdots\vee\neg P_n\vee S_i|(i=1,2,3,\cdots n)$ 这些命题中，至少要有一个是永真的，这里，这种命题只有一个，它具有形式 $|\neg P_1\vee\neg P_2\vee S_i|$。因而，必须证明 $\neg P_1\vee\neg P_2\vee S_i$ 是永真命题联系。把符号 S_i 和 P_i 的具体内容带入表达式就意味着下述命题联系是永真的：$(S\wedge\neg P)\vee(S\wedge P)\vee\neg S$。由此得到 $(S\vee S\vee\neg S)\wedge(S\vee P\vee\neg S)\wedge(\neg P\vee S\vee\neg S)\wedge(\neg P\vee P\vee S)$。这是一个永真命题。由此证明添加前提后的推理式是永真的。

克劳斯指出，如果把联合演算的这个标准用于传统三段论学说，则19个有效式中有15个是可以证明的，但另外四个推理式，即第三格和第四格两格中的AAI式EAO式，不再是有效的。这个差异是由于传统逻辑对全称肯定命题("所有S是P")的解释与我们对公式 $|\neg X\vee Y|$ 的解释并不完全一致。依传统逻辑，必须有客体使S成立时，命题"所有S是P"才正确，而现代逻辑由于顾及逻辑在数学上的应用，已不再把传统的解释看做是基本的，所以要在联合演算中把这四个缺少的推理式推出，必须如在直接推理中所做的那样，把传统逻辑中暗中作出的看来不自明的那个假说明白地写出，作为补充前提添加上去。

用这种方法可以发现，传统三段论19种有效推理式(克劳斯没有考虑弱式)在联合演算中并不全是有效的。以第三格AAI为例，这个推理式可表示为：$|\neg M\vee P|\wedge|\neg M\vee S|\rightarrow\neg|\neg S\vee\neg P|$。这个表达式永真，如果 $\neg(\neg M\vee P)\vee\neg(\neg M\vee S)\vee\neg(\neg S\vee\neg P)$ 是永真的。经变换，得合取范式：$(M\vee M\vee S)\wedge(\neg P\vee M\vee S)\wedge(M\vee\neg S\vee S)\wedge(\neg P\vee\neg S\vee S)\wedge(M\vee M\vee P)(\neg P\vee P\vee M)\wedge(M\vee\neg S\vee P)\wedge(\neg P\vee P\vee\neg S)$。这个表达式并不是永真的。这里，虽然两个前提都是真句子，而且整个推理从形式上看也完全正确，符合三段论的规则，但推出的判断仍不是普遍有效的。原来，和在直接推理中遇到的情形一样，推理式中暗含着一个前提，存在着包含于类M中的事物，即 $\neg|\neg M|$。只要把它补充上去，就可得到一个永真式：$|\neg M\vee P|\wedge|\neg M\vee S|\wedge\neg|\neg M|\rightarrow\neg|\neg S\vee\neg P|$。这个表达式永真，如果下述命题联系永真：$\neg(\neg M\vee P)\vee\neg(\neg M\vee S)\vee\neg M\vee\neg(\neg S\vee\neg P)$。变换，化为合取范式：$(M\vee M\vee\neg M\vee S)\wedge(\neg P\vee P\vee M\vee\neg M)\wedge(M\vee M\vee\vee\neg M\vee P)\wedge(M\vee\neg M\vee\neg P\vee S)\wedge(S\vee\neg S\vee M\vee\neg M)\wedge(M\vee\neg M\vee\neg S\vee P)\wedge(S\vee\neg S\vee\neg M\vee\neg P)\wedge(P\vee\neg P\vee\neg S\vee\neg M)$。无疑，这是永真命题联系。在证明其余三种情况时，具有同样的性质。

克劳斯指出，借助于联合演算及其识别永真公式的标准，可以系统地证明全部正确的传统推论形式，对于传统逻辑认为是正确的推论形式，也可以借助上述方法加以排除，这就完全穷尽了传统推论学说。由于传统推论学说只是类演算的局部情况，故不得不把识别永真式的标准用于一种特殊的十分简单的形式中。不过，在联合演算中，构成三段论的规则完全是多余的。

二

希尔柏脱和阿克曼提出并经克劳斯转述的所谓联合演算的"判定标准"到底是不是一个十分可靠的标准？这是值得怀疑的。希尔柏脱和阿克曼在叙述他们的标准时，认为析取式 $\neg|B_1|\vee\cdots\vee\neg|B_m|\vee|C_1|\vee\cdots\vee|C_n|$ 为永真，当且仅当命题 $|B_1\vee\cdots\vee\neg B_m\vee C_1|$，…，$|\neg B_1\vee\cdots\vee\neg B_m\vee C_n|$ 中至少有一个永真时($m=0$ 或 $n=0$ 的情形也包括在内)。这实际上是承认了这个等值式：

(1) $\neg|B_1|\vee\cdots\vee\neg|B_m|\vee|C_1|\vee\cdots\vee|C_n|\longleftrightarrow|\neg B_1\vee\cdots\vee\neg B_m\vee C_1\vee\cdots\vee C_n|$。

在证明这一等值式的过程中，希尔柏脱和阿克曼写道："我们先考虑以下情形：$|\neg B_1\vee\cdots\vee\neg B_m\vee$

$C_i|$为真时，这时可把这公式写成$|\neg B_1 \wedge \cdots \wedge \neg B_m \to C_i|$之形，显然它意指，类$\neg B_1 \wedge \cdots \wedge \neg B_m$包含在类$C_i$之内，因此先得$|\neg B_1 \wedge \cdots \wedge \neg B_m| \to |C_i|$。由于等值式$|B_1 \wedge \cdots \wedge B_m| \longleftrightarrow |B_1| \wedge \cdots \wedge |B_m|$（如果一系列的类的交换为全类，那么每个类也是全类，逆定理亦真）。我们又得$|B_1| \wedge \cdots \wedge |B_m| \to |C_i|$或$\neg |B_1| \vee \cdots \vee \neg |B_m| \vee |C_i|$，因而便有$\neg |B_1| \vee \cdots \vee \neg |B_m| \vee |C_i| \vee \cdots \vee |C_n|$[2]（第47-48页）。

在这段叙述中，希尔柏脱和阿克曼明确肯定了等值式：(2) $|B_1 \wedge \cdots \wedge B_m| \longleftrightarrow |B_1| \wedge \cdots \wedge |B_m|$。至于是否明确肯定了等值式：(3) $|B_1 \wedge \cdots \wedge B_m \to C_i| \longleftrightarrow |B_1 \wedge \cdots \wedge B_m| \to |C_i|$，这里尚不敢断言。但克劳斯在转述这一证明的过程中，却明确肯定了这一等值式[1]（第281-282页）。

把这三个等值式用简明的形式写出，就是：1′）$|X| \vee |Y| \longleftrightarrow |X \vee Y|$；2′）$|X \wedge Y| \longleftrightarrow |X| \wedge |Y|$；3′）$|X \to Y| \longleftrightarrow |X| \to |Y|$；后两个等值式，克劳斯在运用判定标准证明豪伯定理的过程中，甚至明白写了出来[1]（第274页）。

不难看出，这个基本公式显示了一个有趣的现象，竖号的复合谓词联系可以通过等值变换的形式把原来最外面的竖号脱去，使里面的每一个谓词各自放在竖号之内，而原来的联结词不变，构成新的命题联系。这说明，任何一个联合演算的表达式最终都可以等值地化为使竖号内仅仅出现简单谓词这样的命题联系形式。如果把连同竖号的简单谓词看作一个整体，就可以像命题逻辑那样运用标准的范式判定方法对其进行判定。不妨以三要论第一格AAA式为例，作一尝试。该格式在联合演算中的符号形式是：$|M \to P| \wedge |S \to M| \to |S \to P|$。因为$|X \to Y| \longleftrightarrow |X| \to |Y|$。这个式子可化为：$(|M| \to |P|) \wedge (|S| \to |M|) \to (|S| \to |P|)$。这样，连同竖号的基本命题全是简单的，可以把它们看作整体进行命题逻辑的演算。一步步对其进行等值代换，最后化为标准的合取范式：$(|M| \vee |S| \vee \neg |S| \vee |P|) \wedge (|M| \vee \neg |M| \vee \neg |S| \vee |P|) \wedge (\neg |P|) \wedge (\neg |P| \vee |S| \vee \neg |S| \vee |P|) \wedge (\neg |P| \vee \neg |M| \vee \neg |S| \vee |P|)$。可以看到，四个合取式中都有$\neg |X| \vee |X|$这种形式的永真命题联系，所以整个合取范式是永真的。

使用这种方法，三段论19个有效强式中的1 5个都可以证明是永真的，但是，对于由两个全称前提推出一个特称结论的情况，证明时就会遇到麻烦。以第三格AAI式为例。这一格式可表示为：$(|M| \vee |M| \vee |S|) \wedge (|M| \vee |M| \vee \neg |\neg P|) \wedge (|M| \vee \neg |S| \vee |S|) \wedge (|M| \vee \neg |S| \vee \neg |\neg P|) \wedge (\neg |P| \vee |M| \vee |S|) \wedge (\neg |P| \vee |M| \vee \neg |\neg P|) \wedge (\neg |P| \vee \neg |S| \vee |S|) \wedge (\neg |P| \vee \neg |S| \vee \neg |\neg P|)$。这个合取式中存在着非永真的项，故不是永真的。如果添加前提$\neg |\neg M|$，则得到推理式：$|M \to P| \wedge |M \to S| \wedge \neg |\neg M| \to \neg |S \to \neg P|$。这个推理式，可化为这样的合取范式：$(|M| \vee |M| \vee |S| \vee |\neg M|) \wedge (|M| \vee |M| \vee \neg |\neg P| \vee |\neg M|) \wedge (|M| \vee \neg |S| \vee |S| \vee |\neg M|) \wedge (|M| \vee \neg |S| \vee \neg |\neg P| \vee |\neg M|) \wedge (\neg |P| \vee |M| \vee |S| \vee |\neg M|) \wedge (\neg |P| \vee |M| \vee \neg |\neg P| \vee |\neg M|) \wedge (\neg |P| \vee |S| \vee |S| \vee |\neg M|) \wedge (\neg |P| \vee \neg |S| \vee \neg |\neg P| \vee |\neg M|)$。

到这里，请注意：这个结果是按上述三个基本公式并按命题逻辑规律严格地推导出来的。这个结果应该和按照判定标准判定的结果一样，是永真的。要使这个结果是永真的，就必须承认三种基本永真式：$\neg |S| \vee |S|$，$\neg |P| \vee \neg |\neg P|$，$|M| \vee |\neg M|$。但是，回到初始的规定，就可以发现这三种关系中，后一种关系，即$|M| \vee |\neg M|$并不是永真的。初始规定是，$|M|$表示"所有事物都具有属性M"，实际上表达了一个全称肯定判断；$|\neg M|$表示"所有事物都不具有属性M"，实际上表达了一个全称否定判断；$\neg |M|$表示"并非所有事物都具有属性M"，其实表达了一个特称否定判断；$\neg |\neg M|$表示"并非所有事物都不具有属性M"，则表达了一个特称肯定判断。四者的关系可表示为传统逻辑方阵的形式。在这个方阵中，$|M|$与$\neg |M|$之间和$|\neg M|$与$\neg |\neg M|$之间是矛盾关系。很显然，$|M| \vee \neg |M|$和$|M| \vee \neg |\neg M|$都是永真式；$\neg |\neg M|$和$\neg |M|$之间是下反对关系，不能同假，可以同真，因此$\neg |\neg M| \vee \neg |M|$也是永真式；$|M|$和$|\neg M|$之间是反对关系，不能同

真,可以同假,所以 $|M| \vee |\neg M|$ 仅仅是一个可满足式,而非永真式。这说明现在得到的这个合取范式不可能是永真的,因为只要有一个合取项非永真,整个合取式就非永真,但对于这样的非永真的表达式还可以根据基本公式 1)把它化为 $|M \vee \neg M|$,是倒是一个永真式了。

到这里,可以肯定地说,基本公式 1′)和 3′)并不是一致的。可以进一步说明这一点。把公式 1′)中的 X 代以 $\neg X$,得到:$|\neg X \vee Y| \longleftrightarrow |\neg X \vee Y|$。再把公式 3′)中等值符两边的蕴涵式化为析取式,得到:$|\neg X \vee Y| \longleftrightarrow \neg|X| \vee |Y|$。这就得到:$|\neg X| \vee |Y| \longleftrightarrow \neg|X| \vee |Y|$,即 $|\neg X| \longleftrightarrow \neg|X|$。

根据初始规定,$|\neg X|$ 和 $\neg|X|$ 并不是等值的,从前面的分析,已经知道,$|\neg X|$ 和 $\neg|X|$ 之间是差等关系,由 $|\neg X|$ 真一定可以推出 $\neg|X|$ 真;由 $\neg|X|$ 假一定可以推出 $|\neg X|$ 假;但反过来,由 $\neg|X|$ 真不一定能推出 $|\neg X|$ 真,由 $|\neg X|$ 假不一定能推出 $\neg|X|$ 假。只能承认下面两个表达式永真:$|\neg X| \to \neg|X|$;$|X| \to \neg|\neg X|$。它们实际上是永真公式 $\neg|\neg X| \vee \neg|X|$ 的两种蕴涵式写法。

三

根据上述分析,有理由相信,基本公式 1′)和 3′)中至少有一个是错误的。因为联合演算是为解决传统推论特构的,实是一元谓词演算的一个特殊部分,所以联合演算的公式都可以化归为一般的谓词演算的量化形式,然后再加以考察。公式 1′)和 2′)分别表述为:1″) $(x)F(x) \vee (x)G(x) \longleftrightarrow (x)(F(x) \vee G(x))$;2″) $(x)F(x) \to (x)G(x) \longleftrightarrow ((x)F(x) \to G(x))$。这两个重新表述的公式似乎分别反映了全称量词于析取和蕴涵的分配律。这两个分配律,王宪钧是作如下表述的[3](第158-160页):

定理 108 $\vdash (x)F(x) \vee (x)G(x) \to (x)(F(x) \vee G(x))$

定理 106 $\vdash (x)F(x) \to (x)G(x) \to ((x)F(x) \to G(x))$

书中提供了证明,并明确肯定这两个定理的逆命题不能成立。而公 1″)和 2″)却表明这两个定理的逆命题是成立的。对于定理 106,在论及谓词逻辑规律时,希尔柏脱和阿克曼[2](第74-75页)和克劳斯[1](第286-287页)都有专门的叙述和证明,但对于其逆命题是否成立均没有涉及。对于定理 108,希尔柏脱和阿克曼没有专门的叙述,而克劳斯[1](第266-287页)不仅有明白的表述,还把这个定理的逆命题也作为定理列举出来,同时认为:“上述材料最重要的应用,是检验由已知前提必然推出一定结论的论断。古典三段论就是这一问题的局部情况”。克劳斯没有提供这个逆命题的证明,出于需要又不得不应用它,所以把它作为定理列举出来,只能说是渗入了想当然的成分。

至于基本公式 2′),其一般的量化表达式是:$(x)(F(x) \wedge (x)G(x)) \to (x)F(x) \wedge G(x)$。这是全称量词对于合取的分配律。这个定理是正确的。其证明,详见王宪钧[3](第157-158页),希尔柏脱和阿克曼[2](第74页),克劳斯[1](第283-284页)。

希尔柏脱和阿克曼试图导出一个普遍可行的判定方法,不得不应用三个联合演算的基本公式。但当这三个基本公式被化归为谓词演算的一般量化形式时,在这个目前较为成熟的理论系统中,孰对孰错,是不难分辩的。

那么,导致理论谬误的症结在哪里?不妨对联合演算的特点作一个分析。联合演算实际上可以看作狭谓词演算的一个特殊部分、一种特殊形态,是专为解决传统推论问题而特构的。它的一个明显的特征就是消去了全称量词和特称量词的独立意义,从现代逻辑的角度,以更接近传统词项逻辑的方式去研究和描述传统词项逻辑。又由于联合演算以命题逻辑为基础,变项和逻辑常项的解释又不是单一的,既可以作命题逻辑的解释,又可以作谓词逻辑或类逻辑的解释,这就决定了联合演算的最特殊的方面:其演算不可能在单一的层次上进行,必须在两个层次上同时进行。第一个层次是命题逻辑的层次,在这个层次上,基本命题是竖号内的单纯的谓词,运算时,变项或逻辑常项只作命题逻辑的解释。第二个层次

是谓词逻辑或类逻辑的层次，在这个层次上，基本命题不再是单纯的谓词，而是连同竖号的谓词，竖号内的变项或逻辑常项运算时只作谓词逻辑或类逻辑的解释，联结基本命题的联结词仍作命题逻辑的解释。第一个层次上的基本命题（“单纯的谓词”）在第二个层次看来仅仅是无真假的命题函项，要把它变成有真假的命题，必须对函项有所断定，所以说第二个层次上的基本命题是“连同竖号的谓词”。两个层次上的基本命题既可以是简单的，也可以是复合的。不妨把有一个变项的基本命题称为简单的基本命题，而把竖号内不止一个变项且有联结词联结的基本命题叫做复合的基本命题。联合演算在两个层次上同时受命题逻辑规律的支配。

一个永真的联合演算的表达式总以两种可能的形式通过命题逻辑规律表现出来。一种形式是在第一个层次上呈现永真的命题联系。例如，$|F \vee \neg F|$，$|F \to F \vee G|$，等等。另一种是在第二个层次上呈现永真命题联系。例如，$|F| \to |F|$，$\neg |S \vee P| \vee |S \vee P|$，等等。但联合演算中也有一种形式的永真命题联系，一下子很难看出是在哪个层次上呈现出来的。例如，$\neg |F \to G| \vee \neg |F| \vee |G|$，$|\neg M \vee P| \wedge |\neg S \vee M| \to |\neg S \vee P|$，等等。所以，在使用联合演算的符号形式把传统推论翻译过来以后，还必须找到一个普遍的方法，使我们很易容地判明其真假。希尔柏脱和阿克曼想在第一个层次上解决问题，克劳斯承袭了他们的思路，他们总是试图把一联合演算的公式化为使其竖号在公式最外面的形式，然后在判定过程中脱去竖号，三个基本公式和判定标准正好满足这一要求。忽视了联合演算的两个层次，正是现行联合演算出现混乱和错误的根源。

[参　考　文　献]

[1]　[德] 格·克劳斯．形式逻辑导论[M]．上海：上海译文出版社，1981．

[2]　[德] 希尔柏脱，阿克曼．数理逻辑基础[M]．北京：科学出版社，1958．

[3]　王宪钧．数理逻辑引论[M]．北京：北京大学出版社，1982．

（责任编辑　严　真）

Why is Current Standard of Judgment in Joint Calculau Unreliable？

MA Lei

(Department of Philosophy &Science, Southeast University, Nanjing 210096, Jiangsu, China)

Biography: MA Lei (1965-), male, Professor, Department of Philosophy &Science, Southeast University, majoring in logic.

Abstract: D. Hilbert and W. Ackermann try to give us a decision standard to judge whether a formular of calculau is eternal truth or not. G. Claus use the standard to argue traditional form of inference and remove false form of inference. But so-called decision standard advanced by Hilbert and Aackermann and used by Klaus is unreliable. We can' t use the joint calculau on single level, but on two levels. The first level is the level of propositional logic, the second level is the level of predicate logic or logic of class. Hilbert and Ackermann try to solve the problem on the first level, Klaus follow their erroneous train of thought. It is ignoring two levels of joint calculau that leads to the confusion and mistakes of current joint calculations.

Key words: D. Hilbert and W. Ackermann; G. Claus; joint culculau; decision standard