第55卷 第3期
2002年5月

武汉大学学报(人文科学版)
Wuhan University Journal (Humanity Sciences)

Vol. 55. No. 3
May 2002. 293～298

●科技哲学

微积分辩证认识简要

王 自 华
(武汉大学 人文科学学院, 湖北 武汉 430072)

[作者简介] 王自华(1942-),男,浙江镇海人,武汉大学人文科学学院哲学系副教授,主要从事物理学史和自然辩证法研究。

[摘 要] 微积分在全部数学的历史中是一个最大创造,微积分发现的全部历史中,展现了辩证思维法的胜利,阿基米德的"穷竭法",刘徽的"割圆术",卡瓦列里的不可分量,费马的求切线方法,均是有力的说明。牛顿和莱布尼茨关于建立微积分而作出的杰出贡献,就在于他们分别提出了微积分的基本原理、三个重要概念:流量、流数、瞬和"变量"数学的思想体系。马克思和恩格斯则自觉地运用辩证方法对微积分作了深入探讨。

[关 键 词] 微积分;辩证法;因果律;牛顿;莱布尼茨

[中图分类号] B029 [文献标识码] A [文章编号] 1000-5374(2002)03-0293-06

一、微积分的地位

微积分,这个数学中少有的重要内容,曾振憾过多少人的心,让他们为之而钦仰。恩格斯(Friedrich Engels)指出:"在一切理论成就中,未必再有什么像十七世纪下半叶微积分的发明那样被看做人类精神的卓越胜利了。如果在某个地方我们有人类精神的纯粹和专有的功绩,那就正在这里"[1](第158页)。爱因斯坦(Albert Einstein)写道:"只有微分定律的形式才能完全满足近代物理学家对因果性的要求。微分定律的明晰概念是牛顿(Issac Newton)最伟大的理智成就之一"[2](第223页)。克莱因(Morris Kline)称赞:"微积分是继欧几里得(Euclid)几何之后,全部数学中的一个最大的创造"[3](第49页)。

这些赞美之词,决无半点过誉,对于数学家和工程师而言,微积分给他们带来操作意义上的价值;对于哲学家而言,则给他们带来思维意义上的价值,特别是由此形成的机械决定论,无比深刻地影响了整个18世纪和19世纪人类思维方式和几代科学家的思想,甚至包括科学巨匠爱因斯坦。

被称为"决定论之父"的法国天体力学家拉普拉斯(Marguis de Laplace)确认这个事实:知道了物体的受力,以及知道这物体的初位置和初速度,那么我们就可以根据牛顿的微分方程,计算将来任何时刻它的位置和速度。他在其名著《宇宙系统论》中这样写道:"如果考虑到没有一个现象不是可以从引力定律去得到解说的话,而且考虑到这个定律以很高精度决定天体在每一瞬间和整个过程里的位置和运动,我们更不怕这个定律为某个还没有被观测到的现象所否定;最后,天王星和它的卫星以及四颗新发现的小行星都顺从而且验证了引力定律;我们不能否定这一切证据,使我们不得不肯定,除地球的运动与万有引力的原理之外,自然哲学里没有什么更完美的论证了"[4](第319页)。有点言过其实,却美妙无比!

收稿日期:2001-11-25

决定论体现了因果联系,这本身就包含着深刻的哲理。然而,对微积分的深入研究能够发现,它所包含的哲理远不止这些。恩格斯在总结创建微积分的那一段历史后指出:“…高等数学已经引起了混乱,高等数学把初等数学的永恒真理看作已经被废弃了的观点,常常作出相反的判断,提出一些在初等数学家看来是胡说八道的命题。固定的范畴这里消解了;数学走到了这样一个领域,在那里即使如此简单的关系,如单纯的抽象的量之间的关系、单调的无限性,都采取了完全辩证的形式,迫使数学家们既不自愿又不自觉地变成辩证的数学家”[1](第 65 页)。

就是说,数学的发展要求数学家是好的辩证法的掌握者,所以,恩格斯又说:“…我对数学和自然科学作这种概括性的叙述,是要在细节上也使自己确信那种对我来说在总的方面已没有任何怀疑的东西,这就是:在自然界里,正是那些在历史上支配着似乎是偶然事变的辩证法运动规律,也在无数错综复杂的变化中发生作用,…。这些规律最初是由黑格尔(Georg Wilhelm Hegel)全面地、不过是以神秘的形式阐发的,而剥去它们的神秘形式,并使人们清楚地意识到它们的全部的单纯性和普遍有效性,这是我们的期求之一”[5](第 349-350 页)。有鉴于此,我们的任务是研究在微积分的范围内的细节而不留下任何怀疑,剥去它曾经采取的神秘形式,使辩证法的运动规律昭然若揭、彰明较著。

“数学中的转折点是笛卡儿(René Descartes)的变量。有了它,运动进入了数学,因而,辩证法进入了数学,因而微分和积分的运算也就立刻成为必要的了,它们也就立刻产生了,并且是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的,但不是由他们发明的”[1](第 164 页)。恩格斯的这段话讲得相当贴切。法国数学家和哲学家笛卡儿明确宣称,科学的本质是数学。“通过把自然现象归结为纯物理的事态,他的确作了许多努力去剥掉科学中的神秘主义和玄虚成分。笛卡儿的著作影响很大,他的演绎而且系统的哲学风行于 17 世纪,特别是使牛顿注意到运动的重要性”[6](第 30 页)。除了笛卡儿外,在牛顿和莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz)之前有许多先驱者对微积分的创建作出了贡献。

二、微积分的准备

人们普遍认为,微积分的起源可以追溯到公元前 3 世纪的阿基米德(Archimedes),在西方他和牛顿、高斯(Carl Friedrich Gauss)被称为是最大的三位数学家,是他用所谓“穷竭法”求解了曲边三角形的面积。

阿基米德的穷竭法包含了部分与整体的概念,包含了多与少的差异,包含了趋近的运动态势,也就是包含了初步的、浅易的辩证思想。然而,穷竭法与近代出现的极限概念大相径庭,它只是转弯抹角地从这个概念边上擦过,它引导后人沿这个方向思索与它就是作为近代微积分学基础的极限概念完全是两回事。要说引向微积分的通道—极限运算—的真正“前身”是有的,那就是公元 300 年左右,中国学者刘徽的“割圆术”。

设内接正 n 边形的一边长为 $AB=a_n$,平分 AB 弧于 c,而内接正 2n 边形的一边为 $AC=a_{2n}$。那么,正 2n 边形的面积 S_{2n} 与正 n 边形的面积 S_n 之差为

$$S_{2n}-S_n。$$

利用勾股定理可以推得递推公式:

$$a_{2n}=\sqrt{\left[r-\sqrt{r^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right]^2+\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}。$$

当 n 逐渐增大时,内接正多边形的周长就逼近圆周长。当他算到正 192 边形时,得出圆周率的近似值为 $\frac{157}{50}$(=3.14),而算到正 3072 边形时,得出圆周率为 $\frac{3927}{1250}$(=3.1416)。

他认为这个结果还可以继续算下去,他说:“割之弥细,所失弥少。割之又割,以至于不可割,则与圆合体,而无所失矣”[7](第 29 页)。就是说当边数无限增多时,圆的内接多边形的面积就可无限地接近圆面积。从哲学眼光看,这里显然包含着有限向无限转化的辩证法。在极限条件下,无限多边的多边形与圆之间,

直线与曲线之间达到了“对立面的同一。”

关于刘徽应用的极限概念和由直转为曲的思想还须补充三点[7](第 28 页):首先是纵观割圆过程,它由三个环节组成:一是剖分,先将圆剖分为 6 等份,用 ΔAOB 的面积作为扇形 AOB 面积的近似,则失之过多。二是修补,用 C 将 AB 弧对分,用 ΔACB 的面积修正 ΔAOB 的面积,就会减少损失。三是重复,继续对弧对分,反复分割下去,使内接正多边形无限地逼近圆,而“无限”正是初等数学与高等数学的分水岭。其次是刘徽讨论了“无穷小量”的问题,图 1 中的线段 DC 被刘徽称之为余径,在割圆过程中,余径是一个逐渐变小并最终消失的“无穷小量”。

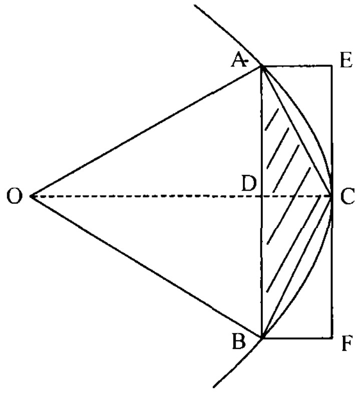

图 1

再次,刘徽将有限的量看做无穷多项的和,这种观念在积分学中是很重要的,一是细分(化整为零),随着弧的剖分,将圆分成小扇形;二是替换(转化形式),即将小扇形转化成相应的小三角形;三是求和(聚零为整),将诸小三角形拼接成内接多边形;四是取极限(无穷分割)。这样“割之又割”以至无穷,最终作为内接多边形面积的极限得出圆面积。

卡瓦列里(Bonaventura Cavalieri)在 1635 年发表《连续体不可分量的几何学》,是微积分奠基的标志。他强调了“点动成线、线动成面”这样的自发的辩证概念[8](第 152 页)。从哲学角度看,这是把点、线、面看作流动范畴,而不是固定范畴;暗含着变化、生成和对立概念间可转化的辩证思想。他引入“全体不可分量的和”的概念,本身就是典型的积分概念。

将微积分的研究推进到可以建立成数学分支之门的是沃利斯(John Wallis)和巴罗(Isaac Barrow)[8](第 156 页)。在阅读了笛卡儿的数学著作,了解了他的数学哲学思想后,沃利斯深切地理解了“变量”进入数学领域的意义,并敏锐地预见到表现“变量”思想的数学新分支产生的社会价值。在他所著的《无穷的算术》里引入变量极限的概念:变量极限是变量能如此逼近一个常量,使得它们之间的差能够小于任意给定的量。

巴罗在他自己的研究中发现了求切线和求积之间的逆关系,这对牛顿等人具有十分重大的影响,1670 年他发表了《光学和几何学讲义》,证明了用现代符号表示的 $\frac{d}{dx}\int_0^x 2dx = 2$ 的等式。另外在巴罗的书中,还能看到两个函数的积和商的微分定理,x 的幂的微分,求曲线的长度,定积分中的变量代数,甚至还有隐函数的微分定理。

马克思(Karl Marx)曾经指出:“全部微分学本来产生于求任意一条曲线上任何一点的切线的问题”[9](第 20 页)。正是费马(Pierre de Fermat)提出了一个求切线的方法[10](第 155 页)。

人们于是惊问,在主要的新结果方面,还有什么有待于发现的呢?答案是“方法的较大普遍性以及在特殊问题里已建立起来的东西中认识其普遍性。这世纪的前 2/3 的时间内,微积分的工作沉没在细节里。另外,许多人在通过几何来获得严密性的努力中,没有去利用或者探索新的代数和坐标几何中蕴含的东西,作用不大的细微末节的推理使他们精疲力竭了。…数学的真正划分不是分成几何和算术,而是分成普遍的和特殊的。这普遍的东西是包罗万象的思想家,牛顿和莱布尼茨提供的”[6](第 65 页)。

三、微积分的建立

牛顿的微积分思想主要散布在他的三篇著作里[6](第 69—75 页)。

牛顿在《分析学》中假定一条曲线,曲线下的面积 Z 已知是

$$Z = ax^m \tag{1}$$

他把 x 的无限小的增量叫做 x 的瞬(moment),并用 0(即现在用的 dx)表示,0y(即现在用的 dz)是面积的瞬,则有

$$z + oy = a(x + o)^m \tag{2}$$

从(2)减去(1),用 0 除方程两边,略去仍然含有的 0 项,就得到:$y = max^{m-1}$。用现在的话来讲,$\frac{dz}{dx} = max^{m-1} = y$,即面积在任意点 x 的变化率是曲线在 x 处的 y 值。反过来,如果曲线是 $y = max^{m-1}$,那么,在它下面的面积就是 $Z = ax^m$。

在这里,牛顿不仅给出了求一个变量对另一个变量的瞬变化率的普遍方法,而且证明了面积可以由求变化率的逆过程得到。这个事实就是现在的微积分基本定理。

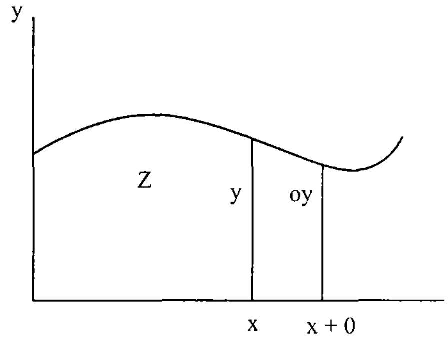

图 2

牛顿尽管在直觉上大体意识到并在实际上机智地处理了微积分中 0 与非 0 的辩证矛盾,因此能够得到正确的结果。然而,他却未能用严密的逻辑方法真正把它说清楚,因此显得自相矛盾。他的推导过程值得怀疑:微分 dx,dz 到底是 0 还是非 0? 如果是 0,为什么要用(x+0)代进 $Z = ax^m$,代进去根本没有意义;如果不是 0,为什么对$(dx)^2$ 进行“魔术变掉”和“暴力镇压”[9](第 86—87 页)后得到的不是近似值反而是精确值($\frac{dz}{dx} = max^{m-1}$)呢? 牛顿陷入不可解脱的逻辑混乱中[11](第 5 页)。

为了摆脱以上困境,十八世纪的达兰贝尔(Jean Le Rond d'Alembert)对牛顿的出发点作了修正。在达兰贝尔的推导中,变化 dx 只是作为发展的最后,所以马克思指出:“达兰贝尔脱下了微分学的神秘外衣,并取得了很大的进步”[9](第 91 页)。但他的这个发展观点是片面的,仍不能清除微分的神秘性质,而且$\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$把他吓得目瞪口呆,因为在初等数学中,$\frac{0}{0}$是个任意值,0 怎么能充当分母呢? 所以,马克思紧接着一针见血地指出:达兰贝尔“真正发展了的,是左边,符号的一边,即 dx,dy 及它们的比,即符号微分系数$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$(不如反过来$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$),这个符号虽然是由数学推导出来的,但又引起某些形而上学的恐怖”。

为了彻底与形而上学决裂,马克思本人亲自对微分作了深入研究,他仔细地讨论了函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx - e$ 求导的整个过程[9](第 4—5 页):

马克思推导过程的关键在于:1、只有令 $x_1 = x$,即 $x_1 - x = 0$,才达到从量变到质变的一个转折点,在此转折点上,预备导函数转化为导数,因为令 Δx 无限接近于 0,只是一个量变过程,预备导函数尽管不断向导函数靠近,但总不是导函数,只有令 $\Delta x = x_1 - x = 0$,才达到这个转折点,从而达到运动状态的间断性与连续性的矛盾统一。

2、以上求导过程是一个充满着矛盾和飞跃的过程。由 x 变到 x_1,因而由 y 变到 y_1 是一次飞跃,其结果得到预备导函数$\frac{\Delta y}{\Delta x}$是一个新的函数,原函数在运算过程中消失了,被否定了,这是第一次否定。从 x_1 再变回到 x,因而 y_1 运动到 y,是运算过程中的又一次否定,这是一次更大的飞跃,此刻的运动并非简单地回到起点,此刻的$\frac{\Delta y}{\Delta x}$并不是简单地转化为似乎无意义的$\frac{0}{0}$,而是转化为有特定值的$\frac{dy}{dx}$,$\Delta y$,$\Delta x$ 被否定了,但

保留了 y 随 x 的变化特征。所以恩格斯才深刻地指出:"只有微分运算才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态,并且也能用数学来表明过程:运动"[1](第 172 页)。

3、微分是扬弃(Aufheben)了的差值。在这里,马克思借用了黑格尔对扬弃的理解。扬弃的过程是这样的:"否定之否定一方面将肯定溶化为否定之流,另一方面又不断地从否定之流中产生出(或凝聚为)新的东西,从而使当初那直接的肯定成为活生生的成长发展过程"[12](第 166—169 页)。

微分是扬弃了的差值,它在运动中、变化中实现,它是 0 与非 0 的对立统一。首先它是 0,只有它是 0,曲边三角形的面积才能精确求得,曲线割线的斜率才能转化为曲线切线的斜率,量变才能转化为质变。诚如恩格斯在给马克思的信中所指出的那样:"只有当量 x 和 y 的最后痕迹消失,剩下的只是它们的变化过程的表达式而不带任何量时,$\frac{dy}{dx}$才能真正表示出在 x 和 y 上已经完成了的过程"[9](第 212 页)。其次我们又应看到,微分作为扬弃了的差值时,它又是非 0,在$\frac{\Delta y}{\Delta x}$向$\frac{0}{0}$变化的过程中,分子变为 0 是分母变为 0 的结果。"因此,$\frac{dy}{dx}$不仅是$\frac{0}{0}$的一个符号,同时又是过程的符号"[9](第 15 页)。在$\frac{\Delta y}{\Delta x}$依特定的函数关系向$\frac{0}{0}$变化的过程中,首先是 Δx 为非 0,再由非 0 变为 0。这个 0 不是一般的 0,它经历了运动和转化,是矛盾的 0,崭新的 0;再是 Δy 由非 0 变为 0,而当差值消失为 0 时,变化的特定关系仍然保留着。

在《流数法》中,牛顿认为变量是由点、线和面的连续运动产生的,他把变量叫做流量(fluent),变量的变化率即速度叫做流数(fluxion)。如流量 x 和 y 的流数,他记为 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$,$\dot{x}$ 的流数是 $\ddot{x}$ 等等。另外,牛顿指出若用 0 表示"无穷小的时间间隔"那么 $\dot{x}0$ 和 $\dot{y}0$ 就是 x 和 y 的无穷小增量,或者说是 x 和 y 的瞬。有了流量、流数和瞬三个重要概念,牛顿把它们广泛地用到几何问题和力学问题的求解上去,他用作曲线的切线,来求解函数的极值问题,求曲线的曲率、曲线的长度,以及求以曲线为界的平面图形的面积。

在《求积术》中,牛顿指出:"随我们的意愿,流数可以任意地接近于在尽可能小的等间隔时段中产生的流量的增量,精确地说,它们是最初增量的最初的比,它们也能用和它们成比例的任何线段来表示"[6](第 74 页)。

就在牛顿建立微积分这门科学的同时,莱布尼茨也在做着类似的工作。莱布尼茨建立了自己的"变量"数学思想体系,明确叙述了微分学的基本原理,指出了若干个函数的和、差、积、商的微分法则。他以求函数的无限小增量为出发点,论证了函数取得这种增量是自变量无限小变化的结果,他把这个函数的增量叫做微分,并用符号 dx,dy 来表示[8](第 159 页)。另外,他引入积分符号 $\int$,提出极值条件 $y'=0$ 和拐点条件 $y''=0$,命名了"微分方程"。

莱布尼茨认为,自然界的任何事物都是在向无限前进。他在《致安吉考特的信》中说:"例如,我们必须把以下五点:(1)一粒沙中的一个微小分子的直径,(2)这一沙粒自身的直径,(3)地球的球体直径,(4)一颗恒星离开我们的距离,(5)整个恒星系的大小;分别设想为①二次微分,②一次微分,③一条通常可指定的线,④一条无限的线,⑤一条无限地无限的线"[14](第 138 页)。莱布尼茨在这里提出了自然界结构各层次的无限序列,可以认为这是数学中无限次微分的原型,包含了朴素的辩证法思想。

但是,"莱布尼茨解说中的缺点并不比牛顿的少。两人都表现了类似的犹豫不决;谁也没有把基本概念弄明白"[13](第 215 页)。如莱布尼茨是这样理解点的:"数学的点是不可分割的,但它们只是样式,只有形而上学的或实体的点(由形式或灵魂所组成)是不可分割和真实的"[14](第 71 页)。因此他俩都未能充分理解微分本身的客观辩证实质,即还未能深刻理解无穷小量实际上不过是在客观世界的矛盾运动中"零"与"非零"的对立统一,而整个微分可以概括为否定之否定的过程。恩格斯指出:"辩证法同样不知道什么僵硬的和固定的界线,不知道什么无条件的普遍有效的'非此即彼!',它使固定的形而上学的差异互相转移,除了'非此即彼!',又在恰当的地方承认'亦此亦彼!',并且对立相互联系;这样,辩证法是惟一在最高度地适合于自然观的这一发展阶段的思维方法"[1](第 84—85 页)。当然,我们不能对古人有太高的要求,要知道

在牛顿去世后 43 年黑格尔才降生,又过了 50 年恩格斯才来到人间;连续和极限的正确观念——微积分这座建筑物的牢固基础——是直到将近两个世纪后才建立的,所以我们还得从心底里钦佩牛顿和莱布尼茨的伟大。

[参 考 文 献]

[1] [德]恩格斯. 自然辩证法[M]. 北京:人民出版社,1984.
[2] [德]爱因斯坦. 爱因斯坦文集:第 1 卷[M]. 北京:商务印书馆,1976.
[3] [美]M·克莱因. 古今数学思想:第 1 册[M]. 上海:上海科学技术出版社,1979.
[4] [法]拉普拉斯. 宇宙系统论[M]. 上海:上海译文出版社,1978.
[5] [德]马克思,恩格斯. 马克思恩格斯选集:第 3 卷[M]. 北京:人民出版社,1995.
[6] [美]M·克莱因. 古今数学思想:第 2 册[M]. 上海:上海科学技术出版社,1979.
[7] 王能超. 千古绝技"割圆术"[M]. 武汉:华中理工大学出版社,2000.
[8] 张 绥. 数学与哲学[M]. 上海:学林出版社,1988.
[9] [德]马克思. 数学手稿[M]. 北京:人民出版社,1975.
[10] 周述岐. 数学思想和数学哲学[M]. 北京:中国人民大学出版社,1993.
[11] 吴燮和,张华夏. 用运动的矛盾观点认识微分[J]. 科学通报,1975.
[12] 邓晓芒. 思辨的张力—黑格尔辩证法新探[M]. 长沙:湖南教育出版社,1992.
[13] [英]斯科特. 数学史[M]. 北京:商务印书馆,1981.
[14] [德]莱布尼茨. 莱布尼茨自然哲学著作选[M]. 北京:中国社会科学出版社,1985.

(责任编辑 严 真)

Brief Introduction to Understanding Dialectically the Infinitesimal Calculus

WANG Zi-hua

(School of Humanities, Wuhan University, Wuhan 430072, Hubei, China)

Biography: WANG Zi-hua (1942-), male, Associate professor, School of Humanities, Wuhan University, majoring in the history of physics and the dialectics of nature.

Abstract: This article affirms first of all that the infinitesimal calculus —the biggest creature of the all mathematics — has its outstanding historical position, expounds the victory of dialectics in developing the history of discovering infinitesimal calculus. It has introduced the "exhaustive method" of Archimedes, the "cyclotomic skill" of liu hui, inseprable quantity of Cavalieri, the method of seeking tangent line of Fermart. This essay puts the stress on the introduction of outstanding contributions of Newton and Leibniz in their creatting infinitesimal calculus. They had put forward the basic principles of infinitesimal calculus、three important concepts: fluent、fluxion、moment and the systematic thoughts of "variable" mathematics respectively. This article eulogizes also the revolutionary tutor Marx and Engels for their deeply approached infinitesimal calculus dialectically.

Key words: infinitesimal calculus; dialectics; law of causation; Newton; Leibniz