资金时间价值的几何定性分析方法

孙　续　元

作　者　孙续元，武汉大学管理学院投资系副教授；武汉，430072。

关键词　投资收益率　几何定性分析模型　资金流量

提　要　在平面直角坐标系中，以时间变量为横轴，资金变量为纵轴，按照投资收益率的内涵定义一个资金时间价值分析模型。该模式用最直观的几何表达方式沟通资金流量、投资收益率、净现值等经济变量间的内在转换关系。运用此种数量转换关系分析和验证若干资金时间价值的定性理论，可使定性理论更具科学性。只有成功地将定性分析和定量分析结合在一起，才有可能使经济理论的研究向定量化的方向发展取得新的突破。

本文旨在建立一种以时间为变量的几何分析模型，较为直观地展示资金价值随某种影响因素变动时所遵循的运动规律，帮助人们加深对资金等值运算及评估理论的认识和理解。

一、资金时间价值分析模型的建立

本模型以投资收益率作为基础。投资收益率，表示的是财务分析或项目评估中投资的确切盈利程度。在国外，人们称之为内部收益率，用IRR表示。从经济含义来解释，它是指使资金流入量现值等于资金流出量现值的折现率。也就是说，当我们假定初始投资额为P，各年实现的现金流入量是Bt（t=1，2…n）时，使式子$\sum_{t=1}^{n}\frac{Bt}{(1+i)^t}=P$成立的收益折现率i，就是所定义的内部收益IRR。为了建立基本分析模型，我们假定投资、收益均只发生了一笔，其间相距的时间是t，那么，上述表达式的概念可以用下面的图1来表现。

在这个图形中，我们建立了一个直角坐标系。该坐标系的纵轴表示资金，叫Y轴；横轴表示时间，称为T轴。原点O表示所论问题的现值时点。图1的经济意义是：在初始时该投资的现金流出量现值为OP，经过时间t以后，在A时刻实现收益终值AQ。将AQ折算为现金流入量现值时，使之与现金流出量现值OP数量相等的折算关系为直线PQ。显然，PQ是

该坐标系中的一条直线，其斜率 tgα＝k 可以直观地表达出使现金流出量现值等于现金流入量现值的折算关系。事实上，我们记 IRR＝k 时，若实际折现率 i_1 大于 k，则意味着 Q 指向初始时刻的关系直线 P_1 的斜率 tgβ＝i_1 大于 k，（如图 2 所示）：这使得 AQ 按 i_1 折现后只能补偿 OP_1 数量的现金流出量现值，即大于 IRR 的折现率使 NPV＜0；反之，如图 2 中所示的 OP_2，其 tgγ＝i_2＜k，从而取得 OP_2 的总现值。从这个总现值中除去初始投资现值 OP 后，仍有长度为 PP_2 的净收益现值，所以 PP_2 就是所谓的净现值 NPV。上文所列示的几何模式完全正确地揭示出了 IRR、NPV 和折现率 i 的时间等值关系。我们把这个模式称为资金时间价值的几何定性分析模型。当然，在这个模型中，我们只考虑了一次性投资和一次性收益的特殊投资问题。并且假定在一定的时间区间内，IRR 随时间变化的关系近似于线性关系。

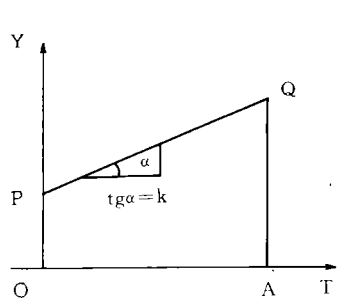

图 1

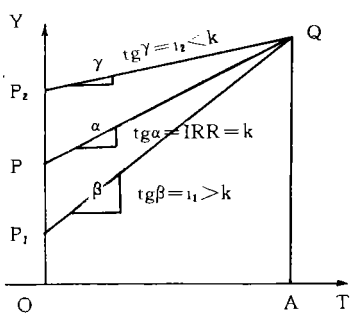

图 2

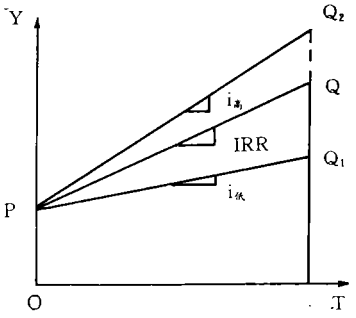

图 3

二、资金时间价值模型的应用

下面利用所建立的几何定性分析模型对资金时间价值的若干理论问题进行解释和讨论。

1. 内部收益率和资金成本的比较分析

设 i＝IRR，$i_{低}$、$i_{高}$分别表示比某投资项目的 IRR 低和高的资金成本。该问题的几何定性分析模型如图 3 所示。图中明确显示出不同的资金成本对项目收益终值的要求。当资金成本小于 IRR 时，折算关系线为 PQ，因为 $i_{低}$＜IRR，所以 AQ_1＜AQ，经济意义为：在资金成本低于内部收益率时，收益终值将取得正收益 Q_1Q；当资金成本大于 IRR 时，折算关系线为 PQ_2，因为 $i_{高}$＞IRR，所以 AQ_2＞AQ，经济意义为：在资金成本高于内部收益率时，收益率终值将出现负收益 QQ_2。

2. 几何定性分析模型除了对市场折现率与内部收益率的分析有明显的直观表现效果外，对以下两种性质的问题也有直观的分析效果

（1）对一个项目，当投资不同而收益相同时，IRR 的变化规律可由如下图 4（a）描述。

图中，P_1 是比 P_2 低的初始投资，在它们的收益终值相同的情况下，与 P_1 相对应的 IRR_1 必定大于与 P_2 相对应的 IRR_2，该图表达了这样的经济意义：在收益不变的项目中，低投资对应的内部收益率大于高投资对应的内部收益率。

（2）与上述情况相反的情形可由图 4（b）来描述。在初期投资不变的情况下，高收益的项目所对应的内部收益大于低收益项目所对应的内部收益率。或者说，改变收益终值能使项

目对应的内部收益率发生改变，内部收益率的变化与收益终值的变化成比例，且方向相同。

3. 对两个项目的决策的比较

（1）一个项目的内部收益率大于市场折现率，而另一个项目的内部收益率小于市场折现率的讨论。由基本几何定性分析模型的概念及逻辑关系，可以拓展到对两个项目的决策的讨论中来应用。设 A、B 为两个独立的投资项目，它们的初始投资额分别为 OP_A 和 OP_B，内部收益率分别为 i_A 和 i_B，两个项目在同一时刻 t 取得的收益终值分别为 AQ_A 和 BQ_B，将上述经济量分别表示在几何定性分析模型中，可得图 5。图 5 中，我们假定两个项目投资处于同样的市场环境，它们的市场折现率都是 $i_{市}$，其中 $i_A<i_{市}$，$i_B>i_{市}$。由图中，我们可以清楚地看到由于 IRR 与 $i_{市}$的关系不同而形成的不同收益效果。对于项目 A 来说，由于 $IRR=i_A<i_{市}$，所以当其收益终值按 $i_{市}$折现时，仅能取得 OP_{A1}数额的现值，此值还不足弥补初始投资额 OP_A。而对项目 B 来说，由于 $IRR=i_B>i_{市}$。所以当其收益终值按 $i_{市}$折现时所能取得的现值额为 O_{B1}，OP_{B1}不但能全部冲减初始投资额 OP_B，而且能取得 P_BP_{B1}的正净现值。

（2）i_A，i_B 均大于 $i_{市}$的讨论。对于 i_A，i_B 均大于 $i_{市}$的两个投资项目，采用几何定性分析模型能非常直观地指明决策方向，如图 6 所示。显然，无论是 $i_A=i_B$ 还是 $i_A<i_B$，由图中可知 $NPA_A=P_AP_{A1}>0$，$NPA_B=P_BP_{B1}>0$。此时应比较$\frac{P_AP_{A1}}{OP_A}$与$\frac{P_BP_{B1}}{OP_B}$的大小来确定方案的优劣。显然，这便是净现值率的概念了。而对于一个具体的决策问题来说，图上作业法有时更能取得直接的分析效果。

（3）i_A，i_B 均小于 $i_{市}$的讨论（略）

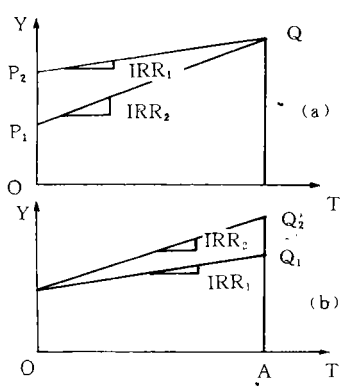

图 4

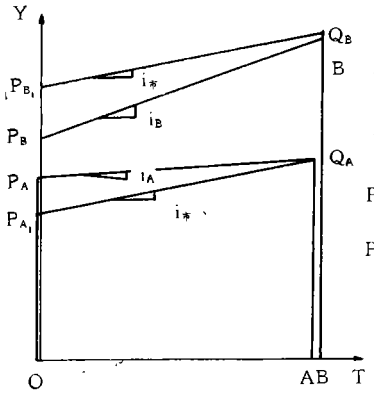

图 5

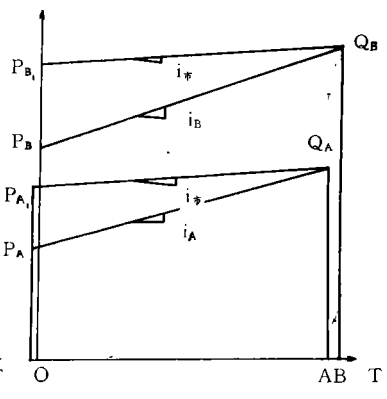

图 6

4. 与净现值变化有关的几何定性分析模型

净现值 NPV 是评价项目投资净收益的一个动态指标，我们不但要善于根据内部收益率的大小计算 NPV 值的大小，更要善于分析净现值 NPV 与内部收益 IRR 之间存在的相互依赖关系，掌握两项指标相互影响的规律。

（1）一个项目，当其内部收益率 IRR 不变时，对应于不同的市场折现率，所能产生的净现值所遵循的变化可以用几何定性分析模型来描述。

如图 7 所示：在市场折现率 $i_{市}$小于项目的内部收益率 IRR 的情况下，当 $i_{市}$由大变小时，由收益终值 AQ 折现所能产生的净现值 NPV 则由小变大，也就是说“$IRR-i_{市}$”的值越大，能

取得的净现值越大。在图中，与投资为 OP，收益为 AQ 相对应的内部收益率是 IRR，$i_{市2}<i_{市1}$，显然在 $i_{市2}$下取得的净现值 PP_2 大于在 $i_{市1}$下取得的净现值 PP_1。反之，当 $i_{市}>IRR$ 时，净现值为负。在 $i_{市}$变大时，既定项目亏损的净现值 NPV 变小。

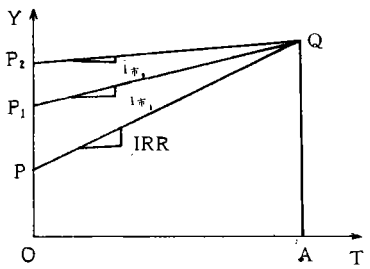

图 7

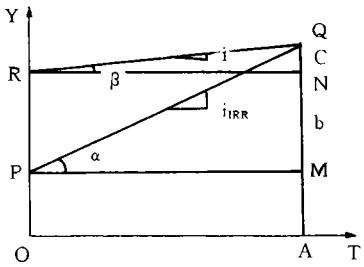

图 8

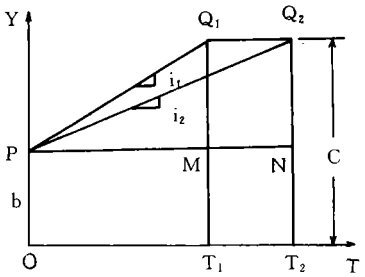

图 9

(2) 与上述问题相反的提法是：可以根据已知的投资现值、收益终值及由它们决定的 IRR 分析预测：欲取得指定的 NPV 值，项目在生产经营的规划中应该达到的实际收益率。具体讨论方法如下。如图 8 所示：OP、AQ 及由它们所确定的 i_{IRR}分别表示既定项目的投资现值、收益终值和内部利益率。PR 表示该项目希望取得的净现值 NPV，它的大小可以用投资现值 OP 的一定倍数关系来表示，即可假定 PR＝kOP。那么在什么样的收益率 i 下，该项目才有可能取得数量为 PR 的 NPV 值呢？为解决这一问题，我们不妨设图中的 OA＝a，并作 RN∥PM∥T 轴，且设 MN 的长为 b，NQ 的长为 c。那么：b＝MN＝PR＝kOP；$b+c=MQ=atg\alpha=ai_{IRR}$；$NQ=b-c=ai_{IRR}-kOP$。又由 NQ＝ai 可知：

$$i=\frac{NQ}{a}=\frac{ai_{IRR}-kOP}{a}=i_{IRR}-\frac{k}{a}OP \tag{1}$$

上述推导中，尽管 Y 轴方向上的线段单位名不相同，但在同一性质的问题中，各线段所表现的数值关系并未因坐标轴单位名的不同而受到影响，所以公式(1)指出了欲取得指定的 NPV，计划项目应该达到的实际收益率。公式 (1) 可以改写成：

$$i=i_{IRR}-\frac{OP}{a}k=i_{IRR}-\frac{OP}{OA}k \tag{2}$$

(2) 式中的 OP/OA 为投资现值与时间长度的线段比。只要 $tg\alpha=i_{IRR}$，则 OA 的长度即为确定的。根据同一种推理，还可以定性地，甚至是定量地比较同时间条件方案之间存在的 NPV，IRR 的关系。因篇幅问题，便不在此作进一步推导了。

5. 与收益终值时间变化有关的几何定性分析方法

一个项目在其投资现值和收益终值确定的情况下，讨论一下取得收益终值的时点及由此而形成的内部收益率 IRR 的关系，也是十分有意义的一件事情，因为对这个问题中的规律的揭示能引起人们对研究收益实现的时间受市场折现率影响的讨论的兴趣。解决该问题的几何定性模型如图 9 所示。图 9 中各条线段及文字的概念已表现得比较清楚，本处不再作解释。从图中的直线观察到的事实是，收益实现的时间越迟，对应的内部收益率 IRR 便越小，这与 IRR 的定义所蕴含的经济意义是完全一致的。但只要收益大于投资值，无论时间多么长，所决定的 IRR 仍然为正。此处我们还能顺便指出 IRR 为 0 的经济意义，如图 10 及图 11：

当投资值＝收益值时，无论实现的时间在何处，IRR＝tg0＝0；当投资值＞收益值时，由于$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，所以 IRR＝tgα＜0，且收益时间延迟得越久，tgα 为负的程度越大。

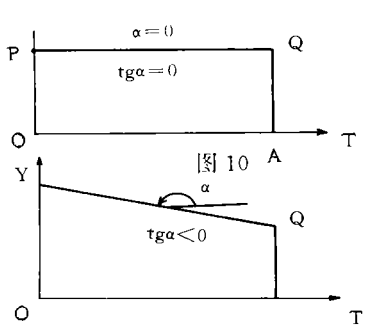

图 11

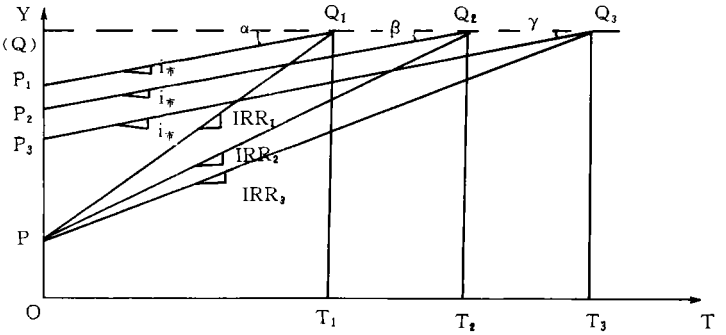

图 12

下面回头来讨论 IRR＞0 时受时间 T 的变化的影响。如图 9，我们假定 T_1T_2 为收益延迟的时间，且设 $T_1T_2=kOT_1$（k 为任意实数），又假定 $OT_1=a$，$MQ_1=NQ_2=$收益终值额－投资现值额＝c－b，i_1 和 i_2 分别表示 T_1 时刻和 T_2 时刻所对应的内部收益率，那么：$i_1=\frac{c-b}{a}$，$i_2=\frac{c-b}{a+kb}$。当 k＝0 时，$i_2=\frac{c-b}{a+ob}=\frac{c-b}{a}=i_1$；当 k≠0 时，由 $i_2=\frac{c-b}{a+kb}=\frac{\frac{c-b}{a}}{1+k\frac{b}{a}}=i_1\cdot\frac{1}{1+k\frac{b}{a}}$，把$\frac{1}{1+k\frac{b}{a}}$称为时间影响系数，令 $\rho=\frac{1}{1+k\frac{b}{a}}$，则 $i_2=\rho i_1$。关系式 $i_2=\rho i_1$ 表示了在投资现值和收益终值不变的情况下，内部收益率受时间变化影响的关系。另外，当 k＞0 时，k 扩大，i_2 缩小；k 缩小，i_2 增大。当 k＜0 时，$i_2=\frac{c-b}{a-|k|b}<\frac{c-b}{a}=i_1$，这个式子意味着提前实现项目既定的收益，可以提高该项目的内部收益率。上述分析使我们可以比较直观地识别相同现金流出量和现金流入量因时间间隔的不同而导致的 NPV 变化规律，如上面图 12 所示。

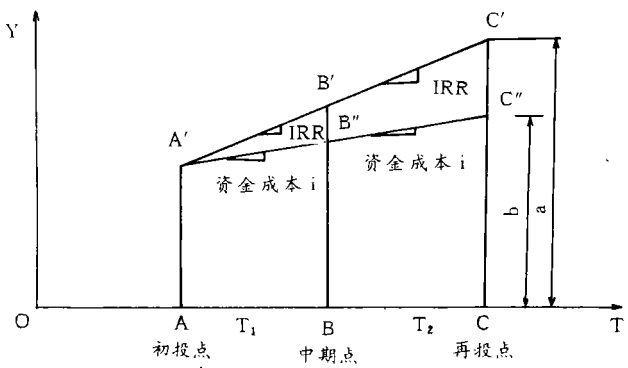

图 13

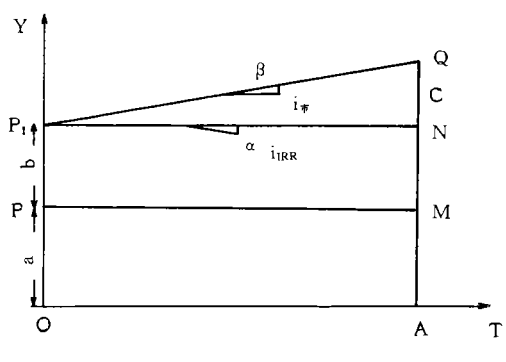

图 14

当一笔收益的实现的时间向后推移时，一方面会使用各时点对应的内部收益率 IRR 按一定规律逐步缩小，同时在各时点的市场折现率相同的情况下，各时间点上所对应的 NPV 亦是

按一定的规律减少的。图12中，$i_{市}$表示不变的市场折现率，IRR_1、IRR_2、IRR_3表示收益终值分别在T_1、T_2、T_3各时点实现时所对应的内部收益率，PQ_1、PQ_2、PQ_3分别为项目在收益终值实现的各时点之下所取得的净现值NPV。由于$P_1Q_1 // P_2Q_2 // P_3Q_3$，所以$P_1P_2 : P_2P_3 = T_1T_2 : T_2T_3$，当$OT_2 = OT_3$时，$P_1P_2 = P_2P_3$。

6. 关于NPV和IRR真实性的讨论

在使用NPV法时，已承认着这样的假设：它假定用产生的现金流入量重新投资会产生相当于企业资金成本的报酬率。而在使用IRR法时，已承认着这们的假设：它假定用产生的现金流入量重新投资会产生与该项目特定的内部收益率IRR相同的利润率。由于两项指标所假设的背景不同，NPV法以资金成本作为重新投资时的资金时间价值评价标尺，以此来衡量重新投资的效益。显然，资金成本对重投资来说是具有真实性和可靠性的评价标尺，而过时的投资报酬率对重投资来说是不具有真实性和可靠性的评价标尺。

上述讨论可以直观地再现于几何定性分析模型之中，如图13所示：A点表示初次投资的时间，AA′为初次投资金额，T_1表示第一次投资距第一次收益的时间长度，B点表示第一次收益的时间，BB′表示第一次收益金额。显然，按内部收益率的意义知，在B点将BB′按IRR折现至A点时，正好等于AA′的长度。由于资金成本在一般情况下必定小于IRR，所以在A点按资金成本i换算成B点的终值时，只会得到BB″<BB′的结论。按照NPV和IRR的意义，应在B点假定将第一次的收益作再投资，图中画出了再投资的情况及再投资的第二次收益情况。（如图中C点所示）由图示可以看出，按IRR计算C点的终值（CC′）和按资金成本的计算C点的终值（CC″）有很大的差异，这种差异还会随二次投资时间的延长而加大。事实上，二次投资收益的金额应以CC″为依据，而不应以CC′为依据。

7. 由社会折现率$i_{社}$及投资现值、收益终值及其内部收益率确定坐标轴单位的方法设想

如图14所示a、b、c、P各量及i_{IRR}，$i_{市}$都是已知的和可求的，要解决的问题是：

现值轴Y与时间轴T的单位比K=t/a取什么值，才能得证$tg\alpha = i$，$IRR = c/t$，$tg\beta = i_{市} = \frac{b+c}{t}$。也就是要通过$i_{市}$，$i_{IRR}$建立于一个t关于a的方程，并求出t与a的关系。根据I_{IRR}的意义；$\begin{cases}(a+b+c)(1+i_{IRR})^{-t}=a\\(a+b+c)(1+i_{市})^{-t}=a+b\end{cases}$，于是有：$(\frac{1+i_{IRR}}{1+i_{市}})^{-t}=\frac{a}{a+b}$。设b=ka，（因为a、b为已知，所以k是可求的），于是有：$(\frac{1+i_{IRR}}{1+i_{市}})^{-t}=\frac{a}{a+ka}=\frac{1}{1+k}$即$(\frac{1+i_{IRR}}{1+i_{市}}) = (\frac{1}{1+k})^t$。解出t得：$t\ln\frac{1}{1+k}=\ln\frac{1+i_{IRR}}{1+i_{市}}$，所以有$t=\ln\frac{1+i_{IRR}}{1+i_{市}}/\ln\frac{1}{1+k}$。

该式表达的意义是：在$tg\alpha = i_{IRR}$，$tg\beta = i_{市}$的条件下，可由a与b的度量关系k得到横轴（时间轴）的时间线段t在坐标系中的长度。这就解决了建立几何定性分析模型中关于现值轴和时间轴的单位认定问题，事实上，用时间T的线段长度除以T的时间长度值。即为时间轴的单位长度值。设所求的T轴线段长度为m，所表达的时间长度是t时，则单位时间长度为m/t，（m是长度单位量，t是时间量。）如果这种设想能够实现，则可以在任意角和IRR之间建立一种正切的“函数”关系，编制函数表，并通过查表计算IRR的取值。

（责任编辑　邹惠卿）