

宏观经济最优控制的反馈原理

匡永祝

提 要

本文在 Leontief 动态投入产出理论基础上,提出了经济政策控制变量,从而建立了宏观经济系统的线性控制模型。利用现代控制方法确定了经济系统在二次性能准则下最优控制的反馈调节规律,并给出了在此规律下宏观经济的最小损耗。

一、投入产出的数学模型

1. 静态投入产出

静态投入产出的数字模型可表述为

$$Y = (I - A)X \quad (1)$$

其中

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$$

T 表示转置运算。 I 是单位矩阵,即除主对角线元素为 1 外,其余元素均为零。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} 称为投入产出系数:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

x_j 表示某地区第 j 部门的总产出量, x_{ij} 表示该地区第 i 部门的产品投入到第 j 部门所消耗的数量。因此, a_{ij} 表示第 j 部门每单位产出所消耗第 i 部门的投入量。所以投入

产出系数矩阵 $A = (a_{ij})$ 反映了该地区各部门经济相互依赖关系,经济的拓扑结构,并称为经济结构矩阵。

现在,我们来看一看方程(1)的经济意义,将(1)式改写成数量形式:

$$y_i = x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$= x_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad (\text{由(2)式})$$

上式右方第一项表示第 i 部门的总产出量,第二项的求和表示包括满足自身需要和所有其他 j 部门的产品生产的需要,这些数量叫做中间使用。因此上式左方表示第 i 部门的总产出量除满足自身和所有其他部门生产需要的中间使用外提供给国家、出口、消费等最终需求。

2. 动态投入产出

动态投入产出是指产出量 x_i 依赖于时间 t , 即 $x_i = x_i(t)$, 产出量 $x_i(t)$ 随时间 t 变化而变化,也就是产品的变动速度 $\dot{x}_i(t) = dx_i/dt \neq 0$ 。动态投入产出的数字模型可描述为^[2]

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{x}_j(t) + y_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

写成向量矩阵形式:

$$X(t) = AX(t) + BX(t) + y(t) \quad (3')$$

显然 $\dot{x}_i(t) = 0, (i = 1, 2, \dots, n)$, (3)式化为

(1)式 $(I-A)X(t)=y(t)$, 这时称为动态平衡。平衡是相对的、暂时的, 不平衡是绝对的, 因此研究(3)式更具有普遍意义。

为解释(3)式中第二项的经济意义, 将上式两边对 $\dot{x}_i$ 取偏导数, 得

$$\frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_j} = b_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

此式中 b_{ij} 表示了第 j 部门全部开工时, j 部门生产速度提高一单位必须持有第 i 部门产品的存储量, 系数 b_{ij} 称为 j 部门的货物 i 的资本系数, 矩阵 $B = (b_{ij})$ 描述了该地区经济的资本结构。

二、经济系统的控制模型

1. 控制模型的建立

设某地区 n 个部门总的供给量为 $S(t)$, 令

$$h_i(t) = \frac{y_i(t)}{S(t)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

表示对第 i 部门每提供单位供给量所要求的最终需求, $h_i(t) = 0$ 表示第 i 部门没有提供最终需求, 即 $y_i(t) = 0$ 。

将(5)改写成向量矩阵形式:

$$Y(t) = H(t)S(t)$$

其中 $H(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))^T$, 则动态投入产出模型(3)改写成

$$X(t) = AX(t) + BX(t) + H(t)S(t) \quad (6)$$

用 $d_i(t)$ 表示对第 i 部门产品的需求量, w_i 表示对该种产品的实际供给比例, 实际供给量为 $w_i S(t)$, 设供求误差为 $e_i(t)$, 则

$$e_i(t) = d_i(t) - w_i S(t) \quad (7)$$

写成向量矩阵形式

$$e(t) = d(t) - wS(t) \quad (7')$$

其中 $e(t) = (e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t))^T$,

$$d(t) = (d_1(t), d_2(t), \dots, d_n(t))^T,$$

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T。$$

(7)式或(7')式反映了产品的供求矛盾。

用 $u_i(t)$ 表示对第 i 部门产品所施加的技术以及政策等措施控制变量。由于供求矛盾, 技术水平及政策措施等是生产的动力, 因此可以提出经济系统的动态行为方程^[3]

$$\dot{x}_i(t) = f_{ii}e_i(t) + c_{ii}u_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

用向量矩阵表示, 即为

$$\dot{x}(t) = Fe(t) + Cu(t) \quad (8')$$

该式的经济意义是明显的, 当 $u_i(t) = 0$, 即对该产品生产不加控制时, 供求矛盾决定了产品生产速度; 当 $e_i(t) = 0$ 时, 即供销平衡时, 生产速度主要是由技术水平和政策措施决定。其中 f_{ii} 和 c_{ii} 是权衡供求矛盾和控制作用的。即当供求成为主要矛盾时, $f_{ii} > c_{ii}$, 反之也是一样。

(6)、(7)、(8)式就是我们所要求的动态经济系统的控制模型。

2. 控制模型标准化

现在, 我们将上面建立的控制模型(6)、(7)(8)式经过数学处理化为一个标准的控制系统模型。

由(6)式

$$H(t)S(t) = [I - A]X(t) - BX(t) \quad (9)$$

上式两边左乘以 $H^T(t)$, 再除以 H^TH (略去 t), 得

$$S(t) = \frac{H^T}{H^TH} \{ [I - A]X(t) - BX(t) \} \quad (10)$$

由(7)和(10)式

$$e(t) = d(t) - \frac{WH^T}{H^TH} \{ [I - A]X(t) - BX(t) \} \quad (11)$$

代(11)式入(8')式, 得

$$X(t) = Fd(t) - \frac{FWH^T}{H^TH} [I - A]X(t) + \frac{FWH^TB}{H^TH} X(t) + Cu(t)$$

即是

$$\left[I - \frac{FWH^TB}{H^TH} X(t) = - \frac{FWH^T}{H^TH} [I - A]X(t) + Cu(t) + Fd(t) \right] \quad (12)$$

为此, 我们定义下列各量:

令

$$\left. \begin{aligned} L &= \left[I - \frac{FWH^TB}{H^TH} \right]^{-1} \\ \bar{A} &= -L \frac{FWH^T}{H^TH} (I - A) \\ \bar{B} &= LC \\ \bar{D} &= LF \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(12)式可写为

$$\dot{X}(t) = \bar{A}X(t) + \bar{B}u(t) + \bar{D}d(t) \quad (14)$$

其中矩阵 $\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ 、 $\bar{D}$ 是时间 t 的连续函数，也可以是定常矩阵。我们称方程组(14)为经济系统状态方程， $X(t)$ 是经济状态向量， $u(t)$ 称为经济政策控制向量，($X(t)$ 和 $u(t)$ 的分量相应于经济学中内生变量和外生变量)。

设(14)式的初始条件为

$$X(t_0) = X_0 \quad (15)$$

称为经济的初始状态。

三、最优控制原理

1. 经济系统的最优化准则

我们假设对 n 个部门产品的需求 $d(t) = (d_1(t), d_2(t), \dots, d_n(t))^T$ 是预知的，而实际产出 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ 。我们要求找一个经济控制策略 $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$ ，使经济系统的实际产出 $X(t)$ 在确定时间间隔 $[t_0, t_f]$ 内尽量接近预知的需求 $d(t)$ 。为此，定义误差向量

$$E(t) = X(t) - d(t) \quad (16)$$

取二次性能指标为最优化准则，即

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [E^T(t) Q(t) E(t) \\ &\quad + u^T(t) R(t) u(t)] dt \quad (17) \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[\|X(t) - d(t)\|_{Q(t)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|u(t)\|_{R(t)}^2 \right] dt \quad (18) \end{aligned}$$

选取 u 使 J 达极小的控制就是最优策略。假定矩阵 Q 半正定对称， R 正定对称，通常可选取 Q 、 R 为对角阵。

(18)式中各项经济意义如下：

积分的第一项表示在整个时间 $[t_0, t_f]$ 内使误差最小，即实际产出 $X(t)$ 尽可能接近所要求的需求 $d(t)$ ；积分的第二项表示在整个时间 $[t_0, t_f]$ 内的控制消耗（如能量、资金

等消耗）最小。所以(18)式表示在保持供求平衡时使整个控制消耗最小。其中矩阵 Q 、 R 的元素的数值是权衡误差与消耗的。

2. 经济系统最优控制问题的表述

在满足经济系统运动规律(14)、(15)的条件下，求出经济系统的最优控制（调节）规律 $u(t)$ ，使经济系统在时间 $[t_0, t_f]$ 内由初始状态 $X(t_0)$ 转移到所要求的状态 $X(t_f)$ 时尽可能达到供求平衡而又使整个控制过程中的消耗最小，即(18)式取极小值。

3. 最优经济控制规律的确定

我们现在求在准则(18)下，满足(14)和(15)的系统的最佳调节规律 $u(t)$ 。由 ПОИТ РЯГИН 极大值原理[4]构造 Hamilton 函数

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left[\|X(t) - d(t)\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2 \right] \\ &\quad + \lambda^T [\bar{A}X(t) + \bar{B}u(t) + \bar{D}d(t)] \quad (19) \end{aligned}$$

其中 $\lambda = \lambda(t)$ 称为协态向量，是待定向量函数。

(19)式关于 u 、 λ 、 x 求偏导数

由

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^T \lambda = 0$$

得

$$u^*(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) \lambda(t) \quad (20)$$

又有

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \bar{A}X + \bar{B}u + \bar{D}d \quad (21)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -Q(X - d) - \bar{A}^T \lambda \quad (22)$$

其端点条件分别为

$$X(t_0) = X_0 \quad (23)$$

$$\lambda(t_f) = 0 \quad (24)$$

设(22)式的解为

$$\lambda(t) = P(t) X(t) + g(t) \quad (25)$$

将上式两边对 t 微分，代(25)式入(20)，再代入(21)式，将其结果代入(25)的微分式经简化后有

$$\dot{\lambda} = \dot{P}X + P\dot{X} + \dot{g}$$

$$= [\dot{P} + P\bar{A} - P\bar{B}R^{-1}\bar{B}^TP]X + P\bar{D}d - P\bar{B}R^{-1}\bar{B}^Tg + \dot{g} \quad (26)$$

将(25)式代入(22)式得到

$$\dot{\lambda} = [-Q - \bar{A}^TP]X - \bar{A}^Tg + Qd \quad (27)$$

比较(26)式与(27)式, 得

$$\dot{P} = -P\bar{A} - \bar{A}^TP + P\bar{B}R^{-1}\bar{B}^TP - Q \quad (28)$$

$$\dot{g} = -[\bar{A}^T - P\bar{B}R^{-1}\bar{B}^T]g - P\bar{D} - Q]d \quad (29)$$

(28)中P因Q是对称矩阵也是对称矩阵, 即 $P = P^T$, 称方程(28)为矩阵Riccati方程。 g 满足向量微分方程(29), (28)和(29)式的端点条件, 比较(24)和(25)式得到, 分别为

$$P(t_f) = 0 \quad (30)$$

$$g(t_f) = 0 \quad (31)$$

上述方程组将由电子计算机求数值解。将求得解代入(25)式后, 再代入(20)式, 得最优控制律

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)\bar{B}^T(t)[P(t)X(t) + g(t)] \quad (32)$$

再将(32)式代入(21)式, 得经济运动的最优轨线

$$X(t) = [A - M(t)P(t)]X(t) + \bar{D}d(t) - M(t)g(t) \quad (33)$$

其中

$$M(t) = \bar{B}R^{-1}(t)\bar{B}^T \quad (34)$$

综上所述, 我们得到下列定理:

定理1 动态经济系统(14)和(15)在准则(18)下最优控制(调节)规律是由(32)式给出的负反馈:

$$u^*(t) = -K(t)X(t) - R^{-1}(t)\bar{B}^T(t)g(t) \quad (35)$$

其中

$$K(t) = R^{-1}(t)\bar{B}^T(t)P(t) \quad (36)$$

称为经济状态反馈控制器。在反馈控制(35)作用下, 经济系统的最优轨线由(34)、(35)式表达。

(35)式的经济意义: 经济系统的反馈控制律由两部分组成: 第一部分是经济状态的线性反馈 $-K(t)X(t)$, 即根据该地区各部门的实际产出实行负反馈调节以保证供求平

衡, 其中 $K(t)$ 各元素的大小表示对各部门的调节强度; 第二部分 $-R^{-1}(t)\bar{B}^T(t)g(t)$ 由对各部门的预知需求 $d(t)$ 决定, 由(29)式和(31)式确定 $g(t)$ 的解, 表示按需求调节。这两种反馈调节才能既保证在整个时间内 $[t_0, t_f]$ 供求平衡又使总的控制消耗最小。

4. 最优控制作用下的最小损耗

由前面的结果, 我们可以计算在反馈调节下的最优损耗, 我们有下述定理:

定理2 动态经济系统(14)和(15)在反馈调节(35)作用下最优损耗为

$$\min J = \frac{1}{2}X^T(t_0)P(t_0)X(t_0) + g^T(t_0)X(t_0) + \varphi(t_0) \quad (37)$$

其中 $\varphi(t_0)$ 由微分方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \frac{1}{2}[g^T\bar{B}R\bar{B}^Tg - d^TQd - g^T\bar{D}d] \\ \varphi(t_f) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

确定。

证明: 考虑一般的二次型函数

$$\frac{1}{2}X^TPX + g^TX + \varphi$$

为书写简单, 略去时间变量 t , 上式对 t 求导数:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}X^TPX + g^TX + \varphi \right] \\ &= \frac{1}{2}(X^T\dot{P}X + X^T\dot{P}X + X^TP\dot{X}) \\ & \quad + \dot{g}^TX + g^T\dot{X} + \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (39)$$

将(21)的 X , (28)的 $\dot{P}$ 和(29)的 $\dot{g}$ 代入(39)式右边, 经简化, 配成完全平方式, 得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}X^TPX + g^TX + \varphi \right] \\ &= \frac{1}{2}\{[u + R^{-1}\bar{B}^T(PX + g)]^TR \\ & \quad [u + R^{-1}\bar{B}^T(PX + g)] - (X - d)^T \\ & \quad Q(X - d)\} - \frac{1}{2}u^TRu \\ & \quad - \frac{1}{2}g^T\bar{B}R\bar{B}^Tg \\ & \quad + \frac{1}{2}d^TQd + g^T\bar{D}d + \dot{\varphi} \end{aligned}$$

上式两边从 t_0 到 t_f 积分得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} X^T P X + g^T X + \varphi \right) \Big|_{t_0}^{t_f} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ (u + R^{-1} \bar{B}^T (P + Xg))^T R [u \\ & + R^{-1} \bar{B} (P \bar{X} + g)] \\ & - (X - d)^T Q (X - d) \} dt \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [u^T R u + g^T \bar{B} R \bar{B}^T g \\ & - d^T Q d] dt + \int_{t_0}^{t_f} [g^T \bar{D} d + \dot{\varphi}] dt \end{aligned}$$

将(30)和(31)的端点条件 $P(t_f) = 0, g(t_f) = 0$ 代入上式移项, 整理化为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\| X - d \|^2_Q + \| u \|^2_R] dt = \frac{1}{2} X^T(t_0) \\ & P(t_0) X(t_0) + g^T(t_0) X(t_0) \\ & + \varphi(t_0) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\| u + R^{-1} \bar{B}^T (P X + g) \|^2_R \\ & - g^T \bar{B} R \bar{B}^T g + d^T Q d \\ & + 2(g^T \bar{D} d + \dot{\varphi})] dt \end{aligned}$$

在上式中, 当

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}(t) \bar{B}^T(t) [P(t) X(t) + g(t)] \\ &= -K(t) X(t) - R^{-1}(t) \bar{B}^T(t) g(t) \end{aligned}$$

并使

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{2} [g^T \bar{B} R \bar{B}^T g - d^T Q d] - g^T \bar{D} d$$

$$\varphi(t) = 0$$

则最优损耗为

$$\begin{aligned} \min J &= \min \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\| X - d \|^2_Q + \| u \|^2_R] dt \\ &= \frac{1}{2} X^T(t_0) P(t_0) X(t_0) \\ &+ g^T(t_0) X(t_0) + \varphi(t_0) \end{aligned}$$

定理证毕

参考文献

- [1] 陈锡康等 经济的数学方法与模型
中国财政经济出版社(1982)
- [2] 匡永祝 随机经济系统的最优预测
武汉大学学报(自然版)1: (1984)
- [3] M. S. Mahmoud, M. F. Hassan and M. I. Yaunis Dynamic modelling and control in water resources Systems Int. J. Systems sci. 1982. 13. 4. 453—467
- [4] A. sage, C. White Optimal Systems Control(1977)

(上接59页)

(Survey of Cüternational Affairs march1939)
伦敦1958年版第395页。

⑪ 卡尔·哈达赫:《二十世纪德国经济史》商务印书馆1984年版,第80页。

⑫ A.J. 杨格森(A.J. young son):《1920—57年英国经济》,伦敦1960年版,第145页。

⑬⑭⑮⑯ 希特勒: (Adolf Hitter)《希特勒秘籍》(Hitter's secret Book),即《第二本书》,在美国出版改名为《希特勒秘籍》纽约1983年版,第46、127、128、135页。

⑰ G. A. 克雷格 (Gorden A. Craig):《1866—1945年德国》(Germany1866—1945),牛津1978年版,第392页。

⑱ 希特勒(Adolf Hitler):《我们奋斗》(My struggle)纽约1946年版,第638页。

⑳ F. 斯特劳斯和杨 (Forror straus and young):《希特勒秘密谈话》(Hitter secret conversation)伦敦1942年版,第155页。

㉑ 《国际条约集(1917—23)》,北京1961年版,

第789页。

㉒ P. A. 雷诺德 (P. A. Reynold):《历史 XLVI》十月号,1961年版,第217页。

㉓ M. 多梅鲁斯(max Domerus):《希特勒的谈话和声明 (Hitler's Reder and proklamation)》,维尔首堡1960年版,第606页。

㉔⑳ E. M. 罗伯逊 (E. M. Roberston):《历史性解释, 二次世界大战的根源》(the origin of the second world war, Historical interpretations)伦敦1971年版,第193、88页。

㉕ 《1918—1945年德国外交政策文献集》(Documents on German Foreign policy 1918—1945),第五卷 No.418,华盛顿1951年版。

㉖ A. J. P. 泰勒 (A. J. P. Taylor)《1914—1945年英国史》(English History 19 14—45),牛津1965年版,第537页。

㉗ 《霍斯巴赫备忘录》(the Hossbach protocol),见《1918—1945年德国外交政策文献集》第一卷,华盛顿1949年版,第29—39页。