次协调逻辑——辩证逻辑形式化的阶梯

桂 起 权

“次协调逻辑”(para-consistent logic)这个术语意味着，新逻辑的协调性次于经典逻辑，但又远高于完全不协调系统。换句话说，在新逻辑中当矛盾律的有效性减弱之后，仍能保持一种稍逊的协调性。

次协调逻辑是近二、三十年来兴起于国际逻辑界的一种新思潮。它是作为一种颇带革命性的非经典逻辑而出现的，它允许“有意义的矛盾”进入形式演算系统，并否认矛盾律的普遍有效性，因此与数理逻辑、辩证逻辑都有密切的联系。这样，就不能不引起人们的浓厚兴趣。次协调逻辑产生于本世纪50年代，在70—80年代吸引了大批的逻辑学家、哲学家和数学家，目前已发展成一个独立的研究领域，对逻辑、哲学与集合论等学科都产生了相当的影响。巴西、澳大利亚、东欧、意大利乃至美国和苏联等国家和地区的学者都积极参与这个新领域的研究。

一

次协调逻辑是一种非常典型的非经典逻辑。在逻辑哲学中，非经典逻辑被划分为两大类：扩展逻辑与异常逻辑。扩展逻辑可以看作原有经典逻辑的改良和扩充，它不触动经典逻辑的基本公理和规则，但增添某些新的算子（如模态或时态算子）以及相应的公理和规则。异常逻辑可以看作经典逻辑的革命性改造，因为它尽管使用与经典逻辑相同或相近的词汇，却从根本上触动和修改原始概念、公理和规则。次协调逻辑属于异常逻辑，因为它触动了在经典逻辑中从来就认为“神圣不可侵犯”的矛盾律，修改了否定词的经典概念。次协调逻辑启示我们：矛盾律失去普遍有效性并不可怕。在新的非经典逻辑中，尽管经典定律被削弱了，然而正确思维并不因此失去基本保证。换句话说，逻辑所应有的确定性、明确性、前后一贯性和论证力量可以依然如故。

次协调逻辑也与其他类型的非经典逻辑存在密切的联系，特别是辩证逻辑与相干逻辑。本文所关心的只是次协调逻辑与辩证逻辑的特殊关系。这也是人们对次协调逻辑兴趣增长的重要原因。

许多现代作者都有意识地用“辩证逻辑”一词去指称黑格尔、马克思及其后继者的辩证思维方式和辩证论述方式，这似乎已经成为一种习惯。由于这种表述方式并不是形式化的，因此可以称之为“用自然语言表述的辩证逻辑”。另外，还可能存在“用形式语言表述的辩证逻辑”。按照澳大利亚逻辑学家卢特莱和迈耶在《辩证逻辑、经典逻辑与世界的协调性》一文中所提出的看法，一种命题逻辑成为辩证逻辑的必要条件是：(1) 必须在分离规则下严密；(2) 具有不协调性（即对于某个A，包括A与$\neg$A在内都能成立）；(3) 必须是有意义的（即并非每一论题都是定理）。这些要求是与次协调逻辑相一致的。意大利逻辑学家马可尼在《辩证法的形式化》一书中也指出，对于黑格尔辩证法的逻辑说明，不协调的形式系统是它的必由

之路。这些话能反映出次协调逻辑研究者显然已经注意到，次协调逻辑与“用形式语言表述的辩证逻辑”（也就是与“辩证逻辑形式化”）存在密切的联系。

从逻辑史上看，次协调逻辑的兴起确实是与辩证法息息相关的。矛盾问题是辩证法所研究的核心问题，也是次协调逻辑的形式系统的关键问题。雅斯柯夫斯基是第一个提出次协调命题逻辑的人，他所面临的就是矛盾系统的形式演算问题，他曾受到过卢卡西维茨对亚里士多德矛盾律的批判性考察的启发。他的《矛盾演绎系统的命题演算》，1948年用波兰文发表，1969年有英译文。其主要动机在于：(1) 解决出现在辩证法中的矛盾的理论系统化问题；(2) 起因于含糊性的矛盾的理论研究；(3) 直接研究某些经验理论的基本假定中的矛盾。雅斯柯夫斯基提出了奠定次协调逻辑的基础的关键性概念：“矛盾系统”——包含正反两个相互矛盾的论题的系统；“过完备系统”——每个公式都是定理的系统（按照次协调逻辑的现代说法改称为“无意义的系统”）。他认为，关于矛盾系统的逻辑必须按如下要求形式化：(1) 矛盾系统的运用并不总是衍推“过完备性”（意思是，不能允许矛盾在系统中任意扩散）；(2) 系统对实际推论而言必须足够丰富；(3) 必须具有直觉上的正当性。他注意到，经典逻辑由于承认 $p \supset (\neg p \supset q)$ 这条蕴涵定律，而不能节制矛盾的扩散，因此不是研究矛盾系统的合适工具。雅斯柯夫斯基所提出的形式化条件为次协调形式系统的研究指引了方向。

次协调逻辑的研究者们还考虑了雅斯柯夫斯基所直接关注的问题以外的其他类型与矛盾和辩证法相关的问题。这些问题主要是：(1) 直接研究所谓逻辑悖论和语义悖论。例如，假如我们打算直接研究并接受集合论悖论，而不是象通常那样回避或拒绝它们，那么我们就得构造出这样的次协调集合论，在其中所研究的集合论悖论是合法的、可导的，而一般形式矛盾则是不允许的、不可导的。在这种情况下，我们需要有一种次协调逻辑。(2) 研究各种次协调性理论（次协调逻辑能为这些理论提供一种逻辑基础）。例如梅农的本体论需要假定一个虚构的（即不存在的）实体域的存在，这种理论的逻辑重构就是次协调性的。还有，一般集合论的一定变种，素朴集合论，早期微积分理论，某种可能不协调的物理理论（如量子力学的一定变种）。(3) 使否定概念更好地适应科学和现实生活中的复杂用法。仅当我们考虑简单命题的否定的时候，经典逻辑的否定概念才是精确的。稍稍超出日常“小买卖”的范围，简单的“非此即彼”模式就不顶用了。否定概念的简单直观的用法可以用不同方式进行扩展，并产生属于不同范畴的否定，其中有些是经典逻辑的否定，有些则是次协调逻辑的否定。(后者具有某种“亦此亦彼”的意味。)

二

次协调逻辑的真正创建者是巴西的达科斯塔，因为他第一个完成了比较完善的次协调逻辑形式系统。这里我们对一般的次协调命题演算 C_n 就不作介绍了(可参看拙作《什么是次协调逻辑》)，因为本文的主要兴趣在于与辩证逻辑更直接相关的次协调形式系统。

达科斯塔和沃尔夫在1980年合作发展了辩证逻辑的新方案。他们在《次协调逻辑研究之一：对立统一的辩证原则》中指出，尽管黑格尔和马克思主义的矛盾和否定概念只有不多一点的普通逻辑含义。但是，在次协调逻辑中已经创造了可以将这种辩证的矛盾和否定概念形式化的相应的逻辑概念和技巧。因此，利用次协调逻辑的技巧（特别是达科斯塔的系统)，并在麦克吉尔和帕里《论对立统一：一个辩证法原理》(1948)的论文的启发下，他们构造了辩证逻辑的命题系统 DL。

在辩证逻辑学家与数理逻辑学家或分析哲学家之间似乎存在着不可逾越的鸿沟和根深蒂固的成见。可是达科斯塔却认为，次协调逻辑可以起到最理想的调解作用。对于大多数数理

逻辑学者来说，辩证逻辑既不是形式的，甚至是在原则上也并不是可以形式化的。但达科斯塔认为，采用次协调逻辑的技巧，辩证逻辑的有些基本意图明显地是可以形式化的。他认为，可能将某些“辩证动机”改用形式语言刻划出来，并能找出其中明晰可靠的“规则性”，这样做无疑会给辩证逻辑“投射新的光芒”。达科斯塔和沃尔夫特别指出，麦克吉尔和帕里关于对立统一的解释提供了清彻明瞭的解释模型。他们的处理方式使当代分析哲学的逻辑技巧和术语得以应用。通常辩证法原理在分析哲学家眼里只是含混不清的思辨性怪物，而他们却使对立统一原理变成对于受分析传统训练的哲学家可以理解的东西。

达科斯塔和沃尔夫的辩证逻辑方案的原始目的是将麦克吉尔和帕里（关于对立统一）的第五种和第六种解释形式化：

> “5. 在任何一个具体的连续体(无论是暂时的还是永恒的)之中，总是存在着两个对立性质 A 与 −A 之间的中间地带。也就是说，作为连续体的延伸，在那里，任何东西要么是 A 要么是 −A 就不是真的。
>
> 6. 在任何一个具体的连续体中都存在某物既是 A 又是 −A 的延伸区(stretch)。”

辩证逻辑命题系统 DL 的初始联词是：$\supset$，$\wedge$，$\vee$，$\neg$ 和稳定性算子$^{\circ}$（小圆圈记在字母的右上角）。最后两个联词需要作特别解释：

(1) 次协调否定词$\neg$不同于经典逻辑，不一定遵守矛盾律 （A 与$\neg$A 未必相互排斥）。

(2) $A^{\circ} \underset{df}{=} \neg(A \& \neg A)$ 这就是说，A 遵守矛盾律可以用稳定性算子来缩写，此时 A 称为合经典的公式。

DL 系统的公设（包括公理和推理规则）也汲取了经典逻辑的(A1—A10)作为自己的一部分：

A1) $A\supset(B\supset A)$

A2) $(A\supset B)\supset(((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C)$

A3) A，$A\supset B/B$

A4) $A\wedge B.\ \supset A$

A5) $A\wedge B.\ \supset B$

A6) $A\supset(B\supset.\ A\wedge B)$

A7) $A\supset.\ A\vee B$

A8) $B\supset.\ A\vee B$

A9) $(A\supset C)\supset((B\supset C)\supset(A\vee B.\supset C))$

A10) $A\vee(A\supset B)$

另外再加一些新公设：

A11) $\neg(A\wedge B)\equiv(\neg A\vee\neg B)$

A12) $\neg(A\vee B)\equiv(\neg A\wedge\neg B)$

A13) $A^{\circ}\wedge B^{\circ}.\supset.(A\supset B)^{\circ}\wedge(A\wedge B)^{\circ}\wedge(A\vee B)^{\circ}\wedge(\neg A)^{\circ}$

A14) $A^{\circ}\wedge B^{\circ}.\supset.((A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A))$

A15) $A^{\circ}\supset(\neg\neg A\supset A)$

A16) $A^{\circ\circ}\equiv A^{\circ}$

A17) $A^{\circ}\supset(A\vee\neg A)\wedge((A\supset B)\vee(\neg A\supset B))$

A18) $\neg A^{\circ}\supset(A\vee\neg A\supset B)\vee(A\wedge\neg A)$

从表面上看 A11 和 A12 与经典逻辑的德摩根定律设有两样，但是我们不能忘记否定词的意义变了。因此，A11和A12是在 DL 系统中矛盾律、排中律不再普遍有效的情况下所体现的否定词的某种重要性质。A13—A15 是为了得到合经典的命题而考虑的，这就是说，遵守矛盾律的命题在新逻辑中仍有适当的地位。A16是用符号表明，若 A 遵守矛盾律，则 A° 也遵守矛盾律，反之亦然。A17保证了，假如 A°，则A与$\neg$A不能同假或同真。最有特异性的是A18，它保证了，假如 A 不遵守矛盾律，则 A 和$\neg$A 是同真或同假的。这一条实质上是用形式语言（在命题演算公理的层次上）刻划了辩证逻辑中的“亦此亦彼”性质。

三

下面我们简单介绍一下 DL 的元定理与语义学。先讲辩证逻辑命题系统 DL 的元定理。

〔定理 1〕所有经典命题逻辑中不涉及否定的推理模式和规则在 DL 中仍然有效。

〔定理 2〕在 DL 中下列模式不再有效：

(1) $A\vee\neg A$	(2) $(A\supset B)\supset .\ \neg A\vee B$
(3) $A\wedge\neg A.\ \supset B$	(4) $\neg(A\wedge\neg A)$
(5) $(A\supset B)\supset\neg(A\wedge\neg B)$	(6) $A\supset(\neg A\supset B)$
(7) $(A\supset\neg A)\supset\neg A$	(8) $B\supset A\vee\neg A$
(9) $(\neg A\supset A)\supset A$	(10) $\neg A\supset(A\supset B)$
(11) $A\vee(\neg A\wedge A^\circ)$	(12) $(A\vee\neg A)\wedge((A\supset B)\vee(\neg A\supset B)).\supset A^\circ$
(13) $(A\supset B)\supset(\neg B\supset\neg A)$	(14) $(\neg B\supset\neg A)\supset(A\supset B)$
(15) $(A\vee\neg A.\ \supset B)\wedge(A\wedge\neg A).\ \supset\neg A^\circ$	

达科斯塔和沃尔夫在验证定理 2 过程中所引进的新真值和真值表是极有启发性的：

F——经典的假

T——经典的真

f——两可的假

t——两可的真

A	$\neg$A	A°	
f	f	f	
F	T	T	遵守矛盾律
T	F	T	
t	t	f	

其中两可的假、两可的真都分别与自己的否定同值，自己成为自己的“他者”，具有“亦此亦彼”的意味。在那种情况下，矛盾律就不再有效（记为 A°的取值为 f)。两可的假(f)与经典的假(F)相比，更接近于经典的真(T)，因为 f、T 两者的否定都称作假。两可的真(t)与经典的真(T)相比，则更接近于经典的假(F)，因为 t、F 两者的否定都称作真。这样，按照真值从低到高的次序排列起来就有：经典假 F、两可假 f、两可真 t、经典真 T。相应于这几种真值，合取、析取和蕴函词的基本真值表可规定如左表。

A B	$A\supset B$	$A\wedge B$	$A\vee B$
f f	T	f	f
F f	T	F	f
T f	f	f	T
t f	f	F	T
f F	T	F	f
F F	T	F	F
T F	F	F	T
t F	F	F	t
f T	T	f	T
F T	T	F	T
T T	T	T	T
t T	T	t	T
f t	T	F	t
F t	T	F	t
T t	t	t	T
t t	t	t	t

如果考虑到蕴函式取值原则为唯有(假⊃假)才为假(只须作适当推广)；再考虑到合取式取值原则为保留较低的真值，而析取式取值原则为保留较高的真值，那么，以上真值表的取值就显得很自然。在真值表背后蕴藏着深刻的哲学意义。使用此类真值表，辩证逻辑 DL 系统的每一定理的正确性就可以按常规逐项得到检验。辩证逻辑原先所受的主要批评意见是：含糊、不确定和包含矛盾。可是，达科斯塔和沃尔夫的真值表却是清晰、明确和无矛盾的最好的证明。作为极端的例

子，在否定词表中，即使f、t分别与其否定同值（从而体现"亦此亦彼"），仍没有陷入逻辑混乱。这个真值表十分有力地表明，辩证逻辑DL系统能把握流动性（亦此亦彼）中的逻辑确定性，辩证逻辑的逻辑确定性、条理性、前后一贯性可以不比经典逻辑逊色。

〔定理 2′〕 在DL中$\neg\neg A \equiv A$（双重否定律）不再有效。（这种失效显然是两可真值f、t的性质造成的。）

〔定理 3〕 在DL中我们有：

(16) $\vdash ((A \supset B) \supset A) \supset A$ (17) $\vdash (A \supset .\ B \vee C) \equiv .\ (A \supset B) \vee (A \supset C)$

(18) $\vdash (A \supset B) \vee (B \supset A)$ (19) $\vdash A^{\circ} \wedge A \wedge \neg A .\ \supset B$

(20) $\vdash A^{\circ} \wedge A \wedge \neg A .\ \supset \neg B$

〔定理 4〕 令$\Gamma \cup \{A\}$为DL的仅包含原子公式p_1，p_2，…，p_n的公式集，且令C^*为经典命题演算C再附加一元联词°以及公设A13—A18。则在命题演算C^*中Γ，p_1°，p_2°，…，$p_n^{\circ} \vdash A$当且仅当在DL中Γ，p_1°，p_2°，…，$p_n^{\circ} \vdash A$。

〔定理 5〕 在DL中我们有：

(21) $A^{\circ} \vdash A^{\circ} \vee \neg A^{\circ}$ (22) $B^{\circ} \vdash (A^{\circ} \supset B^{\circ}) \supset ((A^{\circ} \supset \neg B^{\circ}) \supset \neg A^{\circ})$

(23) $A^{\circ} \vdash A^{\circ} \supset (\neg A^{\circ} \supset B^{\circ})$

〔定理 6〕 DL系统是对否定词协调的。

〔定理 7〕 在DL中我们有：

(24) $\vdash (A \supset B) \supset ((A \supset \sim B) \supset \sim A)$ (25) $\vdash \sim A \supset (A \supset B)$

(26) $\vdash A \vee \sim A$

〔推论〕 联词$\supset$，$\wedge$，$\vee$和$\sim$（称作经典否定或强否定，由定义2确定）满足经典命题逻辑所有公设。

〔定义 1〕 尖顶符号$\Lambda =_{df} P^{\circ} \wedge P \wedge \neg P$

表示P（已确定的原子公式）既遵守矛盾律又违背它。

〔定义 2〕 经典否定或强否定： $\sim A =_{df} A \supset \Lambda$

即A蕴涵既遵守又违背矛盾律的自相矛盾。

〔定义 3〕 尖谷符号$V =_{df} \sim \Lambda$

即尖谷表示尖顶的强否定。

〔定理 8〕 在DL中我们有：

(27) $\vdash A^{\circ} \supset .\ (A \vee \neg A) \wedge (\sim A \vee \sim \neg A)$ (28) $\vdash \neg A^{\circ} \supset .\ \sim (A \vee \neg A) \vee (A \wedge \neg A)$

(29) $A^{\circ} \vee \neg A^{\circ} \vdash ((A \vee \neg A)(\sim A \vee \sim \neg A) \vee \sim (A \vee \neg A) \vee (A \wedge \neg A)$

(30) $\vdash A^{\circ} \supset (\neg A \equiv \sim A)$ (31) $\vdash \Lambda \supset A$

(32) $\vdash A \supset V$ (33) $\vdash (\Lambda \supset A) \equiv A$

(34) $\vdash (A \supset V) \equiv \sim A$

再讲辩证逻辑命题系统DL的语义学。

这是Henkin型的语义学，而不是克里普克型的语义学。它是用模型论、集合论语言表述的，而不是用"可能世界"术语表述的（由于次协调逻辑允许"有意义的矛盾"，因此假如按照"可能世界"的说法，它竟会允许"不可能的可能世界"）。

〔定义 4〕 闭包$\overline{\Gamma} = \{A \in \mathbb{F} : \Gamma \vdash A\}$；这里$\mathbb{F}$为DL中所有公式的集合。

〔定义 5〕 如果$\overline{\Gamma} = \mathbb{F}$，那末$\Gamma$就称为无意义的；否则$\Gamma$就称为有意义的。如果至少有一个公式A，使A，$\neg A \in \Gamma$，那末$\Gamma$就称为不协调的；否则$\Gamma$就称为协调的。如果$\Gamma$是有

意义的而且对每一公式A，若$\Gamma\vdash A$，则$A\in\Gamma$(或$\Gamma=\bar{\Gamma}$)，那末Γ就称为有意义的最大集。如果至少有一个公式A，使得$\Gamma\nvdash A$而且$\Gamma\nvdash\neg A$，那末Γ就称为对否定词¬不完备的；否则Γ就称为对否定词¬完备的。

〔定理9〕 如果Γ是有意义的最大集，并且A和B是任何一个公式，那末就有（这里采用⇒和⟺作为元语言中蕴函和等值的缩写）：

1) $\Gamma\vdash A\Longleftrightarrow A\in\Gamma$　　2) $A\in\Gamma\Rightarrow\sim A\notin\Gamma$；$\sim A\in\Gamma\Longrightarrow A\notin\Gamma$

3) $A\in\Gamma$或$\sim A\in\Gamma$　　4) $\vdash A\Rightarrow A\in\Gamma$

*5) A，$A^{\circ}\in\Gamma\Rightarrow\neg A\notin\Gamma$；$\neg A$，$A^{\circ}\in\Gamma\Rightarrow A\notin\Gamma$；并且$A$，$\neg A\in\Gamma\Rightarrow A^{\circ}\notin\Gamma$（说明：此式表明A与¬A同属于Γ集是可能的，不遵守矛盾律的A在DL中也有合法地位。）

6) A，$A\supset B\in\Gamma\Rightarrow B\in\Gamma$　　7) $A\supset B\in\Gamma\Longleftrightarrow A\notin\Gamma$或者$B\in\Gamma$

8) $A\wedge B\in\Gamma\Longleftrightarrow A\in\Gamma$并且$B\in\Gamma$　　9) $A\vee B\in\Gamma\Longleftrightarrow A\in\Gamma$或者$B\in\Gamma$

10) A°，$B^{\circ}\in\Gamma\Rightarrow(A\supset B)^{\circ}$，$(A\wedge B)^{\circ}$，$(A\vee B)^{\circ}$，$(\neg A)^{\circ}\in\Gamma$；$A^{\circ}\in\Gamma\Longleftrightarrow A^{\circ\circ}\in\Gamma$

11) $A^{\circ}\in\Gamma\Rightarrow A\vee\neg A$，$\sim A\vee\sim\neg A\in\Gamma$

12) $\neg A^{\circ}\in\Gamma\Rightarrow\sim(A\vee\neg A)\in\Gamma$或者$A\wedge\neg A\in\Gamma$

〔定义6〕 DL系统的一个赋值是一个函数V：$\mathscr{F}\to\{0,1\}$使得：

1) $V(A\supset B)=1\Longleftrightarrow V(A)=0$或$V(B)=1$　2) $V(A\wedge B)=1\Longleftrightarrow V(A)=V(B)=1$

3) $V(A\vee B)=1\Longleftrightarrow V(A)=1$或$V(B)=1$

4) $V(\neg(A\wedge B))=1\Longleftrightarrow V(\neg A)=1$或$V(\neg B)=1$

5) $V(\neg(A\vee B))=1\Longleftrightarrow V(\neg A)=V(\neg B)=1$

6) $V(A^{\circ})=V(B^{\circ})=1\Rightarrow V((A\supset B)^{\circ})=V((A\wedge B)^{\circ})=V((\neg A)^{\circ})=V((A\vee B)^{\circ})=1$

7) $V(A^{\circ})=1\Longleftrightarrow V(A^{\circ\circ})=1$　　8) $V(A^{\circ})=1\Rightarrow V(\neg\neg A\supset A)=1$

*9) $V(A)=V(\neg A)\Rightarrow V(A^{\circ})=0$　　10) $V(A)\neq V(\neg A)\Rightarrow V(\neg A^{\circ})=0$

〔定理10〕 如果V是一个赋值，那末：

1) $V(A)=1\Longleftrightarrow V(\sim A)=0$　　2) $V(\bigwedge)=0$

*3) $V(\bigvee)=1$　　4) $V(A^{\circ})=1\Rightarrow V(A)=1$或者$V(\neg A)=1$

5) $V(A^{\circ})=1\Rightarrow V(A)=0$或者$V(\neg A)=0$

6) $V(A^{\circ})=V(B^{\circ})=V(A\supset B)=V(A\supset\neg B)\Rightarrow V(\neg A)=1$

7) $V(A^{\circ})=1\Rightarrow V(\neg\neg A\equiv A)=1$　8) $V(A^{\circ})=1\Rightarrow V(A\vee\neg A)=V(\sim A\vee\sim\neg A)=1$

9) $V(\neg A^{\circ})=1\Rightarrow V(A\wedge\neg A)=0$或者$V(A\wedge\neg A)=1$

*〔定义7〕 如果至少存在一个公式A，使得$V(A)=V(\neg A)$，那末赋值V就称为奇异的；否则V就称为正常的。（说明：对于奇异赋值，A与非A具有相同赋值。这时赋值公式具有亦此亦彼的意味。）

〔定义8〕 如果$V(A)=1$对于每一个赋值都成立，那末给定的公式A就是有效的。如果对每一公式A，$A\in\Gamma$，而$V(A)=1$，那末赋值V就是公式集Γ的一个模型。如果对于Γ的每一个模型V都有$V(A)=1$，那末我们就可以说A是Γ的一个语义学推断，并记为：$\Gamma\models A$。照例$\phi\models A$被缩写为$\models A$，并表示A是有效公式。

现在就可以表明DL系统是相对于赋值V协调的和完备的。

〔定理11〕 $\Gamma\vdash A\Rightarrow\Gamma\models A$

〔定理12〕 每一个有意义的公式集都被包含在最大有意义集之中。

〔定理13〕 每一个最大有意义的公式集都有一个模型。

〔定理14〕 $\Gamma \sqsubseteq A \Rightarrow \Gamma \vdash A$

〔定理15〕 存在着不协调的（对否定词$\neg$不完备的）公式集，它是有模型的。一个公式集有模型，当且仅当它是有意义的。

〔定理16〕 DL 系统不具有有限的特征真值表。

〔定理17〕 在 DL 系统中： (35) $\nvdash (A \vee \neg A) \equiv \neg(A \wedge \neg A)$

〔定理18〕 在DL 系统中有：

(36) $\vdash \neg(A \wedge \neg A) \equiv.\ \neg A \vee \neg\neg A$ (37) $\vdash \neg(A \vee \neg A) \equiv.\ \neg A \wedge \neg\neg A$

(38) $\vdash A \wedge \neg A.\ \equiv \sim(\sim A \vee \sim\neg A)$ (39) $\vdash \sim(A \wedge \neg A) \equiv.\ \sim A \vee \sim\neg A$

从次协调的语义学的观点看，下述情况都是可能的：A真$\neg$A假；A假$\neg$A真；A与$\neg$A同真；A与$\neg$A同假。

〔定理19〕 (E. H. Alves 定理)DL系统是可判定的。

以上标上星号＊的定义和定理，能在命题演算的元定理和语义学层次上刻划辩证逻辑中的“亦此亦彼”性质。

四

如上所述，在《次协调逻辑研究之一：对立统一的辩证原则》一文中，达科斯塔和沃尔夫构造了辩证逻辑的命题演算 DL，其目的是按照麦克吉尔与帕里对辩证法的对立统一法则的解释把这个法则形式化。他们认为，这样一种命题逻辑其实只是更丰富、更有哲学意义的逻辑的第一步。在《次协调逻辑研究之二：量词与对立统一》一文中，他们又把 DL 系统扩展成为一阶谓词逻辑 DL^Q，并阐明这样做一点也不损害原来的意图。

辩证逻辑一阶谓词系统DL^Q同样有许多元定理，也有自己的语义学。限于篇幅，我们在这里只介绍富于辩证意味的结论。

达科斯塔和沃尔夫指出，运用 DL^Q 的材料，可以明确构造对立统一的辩证原则。他们把对立统一法则的两种重要形式构造如下：

第一种形式（对应于麦克吉尔与帕里的第五种解释）：如果 $a \in \underset{\sim}{A}$并且 p 是$\underset{\sim}{A}'$的一个一位谓词常项符号（$\underset{\sim}{A}$ 表示公式则$\underset{\sim}{A}'$ 表示相应语句），则有： A_{25}' $\neg(p(a) \vee \neg p(a))$

第二种形式（对应于麦克吉尔与帕里的第六种解释）：假定 $b \in \underset{\sim}{B}$ 并且Q是一个属于$\underset{\sim}{B}'$的一位谓词常项符号；在这些条件下，我们有： A_{26}' $Q(b) \wedge \neg Q(b)$

以上两个公式是用一阶谓词逻辑的形式语言刻划了辩证逻辑中的“亦此亦彼”性质，而且具有很强的直观性。第一个公式告诉我们：“并非非此即彼”，第二个公式告诉我们“亦此亦彼”！

我们曾经向达科斯塔提出疑问。因为他们的次协调命题逻辑和谓词逻辑，尽管都能容纳有意义的矛盾，然而它们似乎只是处理静态矛盾，而不是对付动态矛盾。为了答复我们的疑难，达科斯塔写了《辩证时态逻辑简论》，提出了用次协调时态逻辑处理动态矛盾的基本方案。

最后，我们认为有必要强调一下，达科斯塔早已注意到，应用次协调的逻辑技巧和数学工具而使辩证法理论形式化，有可能会导致对“正统的”辩证法学说的某种偏离。但他又认为，这种“偏离”并不是对辩证法实质的背离和歪曲，而是在保持实质前提下的一种形式结构上的调整和校正，因此是“对辩证法理论的合乎需要的调整”。我们也认为，用自然语言表述的辩证法不可能原封不动地被形式化。逻辑的形式化的目的就在于概括和简化，在于增加精确性和严格性。我们不能指望形式语言与它的非形式的现实原型之间绝对符合。任何形式化处理都是对非形式原型的提炼和合理的逻辑重构，这对辩证法的自然原型也决无例外。