

现金流等值定理与L诺模图

樊学林 李安南

樊学林、李安南二同志,针对现代经济生活中复利、年金、现值、终值等有关投资决策过程中运用传统的公式计算和查表方法计算,工作繁重费事,效率低的状况,潜心研究并提出了“L系数”及与之对应的“l利率”两个新概念,根据这两个概念确立了现金流等值定理,设计了L诺模图。以全新的思路、理论和方法,打破了传统的计算理论和方法,并建立了“L系数”计算理论体系和方法体系,使繁重费事的计算变得十分简便。堪称为会计及投资数学上的一大突破。

动态评价体系基础是等值计算,而等值计算理论是建立在复利基础上的,即本金P在实利率*i*或名义利率*r*条件下,经过*n*年后获本利和*F*:

按普通复利计算 $F = P(1+i)^n$ (1)

按连续复利计算 $F = Pe^{r \cdot n}$ (2)

上式是复利计算的原始公式,(1)式是假定每年付息一次的普通复利计算公式,(2)式是假定付息周期为年的连续复利计算公式,也就是说(1)、(2)式是以年利率为中心的复利计算体系原始公式。应该指出,尽管上式已沿用几个世纪,但是作为等值计算原始理论公式(注①)本身却存在着以下两个问题:一是本利和计算式是以每年付息一次为条件的条件式,并没有从理论上全面反映时间价值存在的内在规律,二是(1)、(2)式为指数表达式,由它派衍的等值计算理论公式是指数、对数式,于是带来了动态经济分析计算繁琐、冗长、难解的问题。为了解决以上问题,我们引入了一个新的概念,即L系数。

一、L系数与l利率

定义L系数为整个计算期利息($F-P$)与计算期終了时的本利和*F*的比值,即:

$$L = (F - P) / F \quad \text{..... (3)}$$

将(1)、(2)式代入上式得到L系数表达式:

$$\text{按普通复利计算} \quad L(i, n) = 1 - 1/(1+i)^n \quad \text{..... (4)}$$

$$\text{按连续复利计算} \quad L(r, n) = 1 - 1/e^{r \cdot n} \quad \text{..... (5)}$$

定义l利率为整个计算期利息($F-P$)与计算期期初本金*P*的比值,即

$$l = (F - P) / P \quad \text{..... (6)}$$

将(1)、(2)式代入上式得到l利率表达式:

普通复利因子公式

复利因子名称	因子符号	复利系数公式	L 系数公式
复利终值因子	$(F/P, i, n)$	$(1+i)^n$	$1/L$
复利现值因子	$(P/F, i, n)$	$1/(1+i)^n$	$L/1$
年金现值因子	$(P/A, i, n)$	$[(1+i)^n - 1] / [i \cdot (1+i)^n]$	L/i
投资回收因子	$(A/P, i, n)$	$[i \cdot (1+i)^n] / [(1+i)^n - 1]$	i/L
年金终值因子	$(F/A, i, n)$	$[(1+i)^n - 1] / i$	$1/i$
还债基金因子	$(A/F, i, n)$	$i / [(1+i)^n - 1]$	$i/1$

连续复利因子公式

复利因子名称	因子符号	复利系数公式	L 系数公式
年金现值因子	$(P/U, r, n)$	$(e^{r \cdot n} - 1) / (r \cdot e^{r \cdot n})$	L/r
投资回收因子	$(U/P, r, n)$	$(r \cdot e^{r \cdot n}) / (e^{r \cdot n} - 1)$	r/L
年金终值因子	$(F/U, r, n)$	$(e^{r \cdot n} - 1) / r$	$1/r$
还债基金因子	$(U/F, r, n)$	$r / (e^{r \cdot n} - 1)$	$r/1$
现金流换算系数	$(A/U, r, n)$	$(e^r - 1) / r$	i/r
	$(U/A, r, n)$	$r / (e^r - 1)$	r/i

按普通复利计算 $1(i, n) = (1+i)^n - 1$ (7)

按连续复利计算 $1(r, n) = e^{r \cdot n} - 1$ (8)

由 L 系数与 1 利率定义式 (3)、(6) 式得到它们的关系式 $1/L - 1/1 = 1$ (9)

由 L 系数与 1 利率表达式 (4)、(5)、(7)、(8) 式得到它们的另一关系式

$$L(i, n) + 1(i, -n) = 0 \quad \text{..... (10)} \quad L(r, n) + 1(r, -n) = 0 \quad \text{..... (11)}$$

上式说明 L 系数与 1 利率具有共轭性质。

通过 L 系数与 1 利率，可以使等值计算中常用的复利因子计算公式极大简化。

二、L 系数等值计算基本公式

在现金流等值计算中常用到复利因子公式，现将 L 系数与 1 利率表达式代入复利因子公式，使得复利因子指数式简化成一种简单的比例式。上表列出了它们的对应关系。

由上表所列 L 系数公式很容易得到 L 系数比例式是

$$P:A:U:F = L:i:r:1 \quad \text{..... (12)}$$

式中：P 为现值，它对应 L 系数；A 为等额年值，它对应实际利率 i；U 为均匀年值，它对应名义利率 r；F 为终值，它对应 1 利率。

应该指出，式中 A 与 i 通常是以年为计息周期的等额值与利率，同时它也可代表月、季等计息周期的等额值与利率。

通过 L 系数比例式我们将揭示现金流等值计算的一个重要规律。

三、现金流等值定理

现金流等值计算理论是在复利基础上发展和完善的一种理论体系。前面我们通过现金流等值计算复利因子 L 系数公式，推导出了简单的 L 系数比例式。通过比例式我们将进一步展开对现金流等值计算规律的论证。

由 (12) 式可改写为

$$P:A_{\text{年}}:A_{\text{季}}:A_{\text{月}}:U:F = L:i_{\text{年}}:i_{\text{季}}:i_{\text{月}}:r:1$$

式中：A_年、A_季、A_月 是计息周期分别为年、季、月的现金流等额值；i_年、i_季、i_月 是计息周期分别为年、季、月的计息利率。

如果上式中计息周期年、季、月等无限缩小至计息周期为无穷小间隔 Δ ，于是普通资金、普通复利现金流就变成了连续资金、连续复利现金流，即公式中 $U = mA_{\Delta}$ ， $r = mi_{\Delta}$ (m 为一年中计息周期数)。

如果上式中计息周期月、季、年等无限扩大至整个计算期 n 年，则式中 $F = A_{n\text{年}}$ ， $1 = i_{n\text{年}}$ 。

由上分析，上式可改写为

$$P:A_{\text{年}}:A_{\text{季}}:A_{\text{月}}:A_{\Delta}:A_{n\text{年}} = L:i_{\text{年}}:i_{\text{季}}:i_{\text{月}}:i_{\Delta}:i_{n\text{年}} \quad \text{..... (13)}$$

将上式缩写为

$$P:A^* = L:i^* \quad \text{即} \quad A^*:i^* = P:L \quad \text{..... (14)}$$

式中 A^* 为任意计息周期期末等额现金流(注②)的等额值， i^* 为相应计息周期的计息利率。

由(14)式得到了期末等额现金流等值定理：具有相同计算期的期末等额现金流等值的充分且必要条件是它们的等额值与计息利率的比值相等。

令计息周期初值为 D ，计息周期末值为 A ，根据计息利率 i 的定义得到

$$\begin{aligned} i_{\text{年}} &= (A_{\text{年}} - D_{\text{年}}) / D_{\text{年}} & i_{\text{季}} &= (A_{\text{季}} - D_{\text{季}}) / D_{\text{季}} \\ i_{\text{月}} &= (A_{\text{月}} - D_{\text{月}}) / D_{\text{月}} & i_{\Delta} &= (A_{\Delta} - D_{\Delta}) / D_{\Delta} \end{aligned} \quad \text{..... (15)}$$

现定义计息周期贴现系数 I (注③) 为计息周期利息 $(A - D)$ 与计息周期末值 A 的比，即

$$\begin{aligned} I_{\text{年}} &= (A_{\text{年}} - D_{\text{年}}) / A_{\text{年}} & I_{\text{季}} &= (A_{\text{季}} - D_{\text{季}}) / A_{\text{季}} \\ I_{\text{月}} &= (A_{\text{月}} - D_{\text{月}}) / A_{\text{月}} & I_{\Delta} &= (A_{\Delta} - D_{\Delta}) / A_{\Delta} \end{aligned} \quad \text{..... (16)}$$

由以上计息利率 i 与贴现系数 I 的定义式得到

$$\begin{aligned} A_{\text{年}}:D_{\text{年}} &= i_{\text{年}}:I_{\text{年}} & A_{\text{季}}:D_{\text{季}} &= i_{\text{季}}:I_{\text{季}} \\ A_{\text{月}}:D_{\text{月}} &= i_{\text{月}}:I_{\text{月}} & A_{\Delta}:D_{\Delta} &= i_{\Delta}:I_{\Delta} \end{aligned} \quad \text{..... (17)}$$

将上式代入(13)式得到

$$P:D_{\text{年}}:D_{\text{季}}:D_{\text{月}}:D_{\Delta}:F = L:I_{\text{年}}:I_{\text{季}}:I_{\text{月}}:I_{\Delta}:1$$

由于式中现值 P 就是以计息周期为计算期 n 年的期初值 $D_{n\text{年}}$ ， L 系数就是以计息周期为计算期 n 年的贴现系数 $I_{n\text{年}}$ ，于是上式可缩写为：

$$D^*:F = I^*:1 \quad \text{即} \quad D^*:I^* = F:1 \quad \text{..... (18)}$$

式中 D^* 为任意计息周期期初等额现金流(注④)的等额值， I^* 为相应计息周期的贴现系数。

由(18)式得到了期初等额现金流等值定理：具有相同计算期的期初等额现金流等值的充分且必要条件是它们的等额值与贴现系数的比值相等。

在计算期相同条件下，由(12)、(14)、(18)式很容易得到

$$A^*:i^* = D^*:I^* \quad \text{..... (19)}$$

由(19)式得到了期末等额现金流与期初等额现金流等值定理：具有相同计算期的期末等额现金流与期初等额现金流等值的充分且必要条件是期末等额现金流等额值与其计息利率的比等于期初等额现金流等额值与其贴现系数的比。

四、现金流等值定理应用

1. 动态投资回收期公式

动态投资回收期是把各年净收益按极限利率(或贷款利率)折算为现值逐年累计，直至等于期初点全部投资所需要的时间，即

$$\sum_{t=1}^T A_t \cdot (P/F, i, t) = K \quad \dots\dots (20)$$

式中：T 为动态投资回收期； A_t 为各年年末净收益；K 为初一次性投资；i 为极限利率（或贷款利率）； $(P/F, i, t)$ 为按极限利率 i 贴现的各年复利现值因子。

若各年净收益为常数 A，则

$$\sum_{t=1}^T (P/F, i, t) = K/A \quad \dots\dots (21)$$

从现金流等值的观点来考察动态投资回收期公式(21)式，则式中期初一次性投资 K 为现值，各年净收益 A 为等额年值，在极限利率 i 条件下现值 K 在动态投资回收期 T 内换算为现金流等额年值 A。应用期末等额现金流等值定理公式(14)式得到

$$K:A = L(i, T):i \quad \text{即} \quad L(i, T) = K/A \cdot i \quad \dots\dots (22)$$

(22)式就是求解动态投资回收期的 L 系数公式。

现进一步证明(22)式的正确性。

由(21)式得到

$$1/(1+i) + 1/(1+i)^2 + \dots\dots + 1/(1+i)^T = K/A \quad \dots\dots (23)$$

$$\text{用 } 1+i \text{ 乘以上式两边得到} \quad 1 + 1/(1+i) + \dots\dots + 1/(1+i)^{T-1} = K/A \cdot (1+i) \quad \dots\dots (24)$$

$$\text{将(24)式两边与(23)式两边相减得到} \quad 1 - 1/(1+i)^T = K/A \cdot i \quad \dots\dots (25)$$

$$\text{将 } L \text{ 系数表达式(4)式代入上式得} \quad L(i, T) = K/A \cdot i$$

证毕。

2. 内部收益率公式

内部收益率是各年净收益贴现金额等于期初点全部投资的贴现率，即

$$\sum_{t=1}^n A_t (P/F, IRR, t) = K \quad \dots\dots (26)$$

式中：IRR 为内部收益率；n 为投资项目可获净收益 A_t 的年数； $(P/F, IRR, t)$ 为按内部收益率贴现的各年复利现值因子。

$$\text{若各年净收益为常数 } A \text{ 时，则} \quad \sum_{t=1}^n (P/F, IRR, t) = K/A \quad \dots\dots (27)$$

从现金流等值的观点来考察内部收益率公式(27)式，则期初一次性投资 K 为现值，各年净收益 A 为等额年值。在 n 年内，现值 K 在内部收益率 IRR 条件下换算为现金流等额年值 A，应用期末等额现金流等值定理(14)式得到

$$K:A = L(IRR, n):IRR \quad \text{即} \quad L(IRR, n)/IRR - K/A = 0 \quad \dots\dots (28)$$

(28)式就是求解内部收益率的 L 系数方程式。

现进一步证明(28)方程式的正确性。

$$\text{由(27)式得到} \quad 1/(1+IRR) + 1/(1+IRR)^2 + \dots + 1/(1+IRR)^n = K/A \quad \dots\dots (29)$$

$$\text{用 } 1+IRR \text{ 乘以上式两边得} \quad 1 + 1/(1+IRR) + \dots + 1/(1+IRR)^{n-1} = K/A \cdot (1+IRR) \quad \dots\dots (30)$$

$$\text{将(30)式两边与(29)式两边相减得到} \quad 1 - 1/(1+IRR)^n = K/A \cdot IRR \quad \dots\dots (31)$$

$$\text{将 } L \text{ 系数表达式(4)式代入上式整理得到} \quad L(IRR, n)/IRR - K/A = 0 \quad \dots\dots (32)$$

证毕。

五、L 诺模图

在经济活动中，人们常是着眼于实用性，为了避免复利指数式运算绘制了几十张复利因子表。但在复利因子表实用中，或因表格过多，或是表中参数间隔过大，使用起来甚感不便，于是国内外专家学者推出了一系列直接查读参数的图解法。例如联合国工业发展组织 (UNIDO) 1984 年在东京举办的国际培训班上推荐的教材《投资与经营决策的效益分析》(注⑤) 一书，就专门介绍过一种诺模图，但其绘制复杂，查读困难，不易推广应用。

现在我们根据现金流等值定理设计了一种新的多功能诺模图，即 L 诺模图，用它可使现金流等值计算及动态投资回收期、内部收益率、翻番指标的求解都变得十分直观、简捷，对于投资项目动态评价参数敏感性分析尤为方便。下面我们将具体介绍它的绘制原理，并举例说明它的使用方法。

1. L 诺模图绘制原理

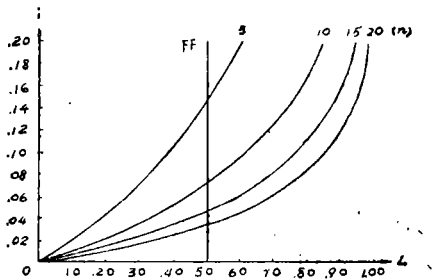


图 1

如图 1 所示，在年利率 i 与 L 系数坐标系中绘制一组曲线，每条曲线均是假定计算期年数 n 为定值，按照 L 系数表达式 $L = 1 - 1/(1+i)^n$ 绘制的。显然这组曲线反映了年利率 i 、计算期年数 n 和 L 系数三者之间的关系，已知其中的两项就可在曲线图中直接查出第三项值。

例如本金翻番公式是 $F/P = (1+i)^n = 2$ 将它代入 L 系数表达式得到 L 系数值为

$$L = 1 - 1/(1+i)^n = 0.5$$

因此可在 $i-L$ 坐标系的曲线图 (图 1) 中绘出 $L = 0.5$ 的本金翻番线 FF ，通过它可直接查读翻番参数值。

现应用现金流等值定理公式 $P/A = L/i$ 可将图 1 中的 $i-L$ 坐标系改换成等额年值 A 与现值 P 坐标系，其 $A-P$ 坐标系单位没有限定，但要求一致，如图 2 所示。于是在图 2 中曲线就反映了现值 P 、等额年值 A 、年利率 i 和计算期年数 n 四者之间的关系。在已知其中三项的条件下就能在曲线图中直接查出第四项值。

显然在图 2 中是能直接实现现值 P 与等额年值 A 之间相互转换的，也就是可进行现金流现值与现金流等额年值的等值计算。除此之外，根据动态投资回收期 L 系数公式 (22) 式和内部收益率 L 系数方程式 (28) 式，在图 2 中也可直接查读投资项目的动态投资回收期与内部

收益率值，图中现值 P 就代表期初一次性投资额，等额年值 A 就代表各年均匀净收益值。

在图 2 中还绘有 $F-P$ 坐标系，它是进行终值 F 与现值 P 等值计算的坐标系统，其等值原理是 L 系数直接表达了终值 F 与现值 P 之间相互转换的现金流等值关系，即

$$F/P = (1+i)^n = 1/(1-L) \dots\dots (33)$$

在图 2 的 $F-P$ 坐标系中可直接进行投资项目的各年投资折现求出它的期初一次性投资，也可进行残值的贴现计算。

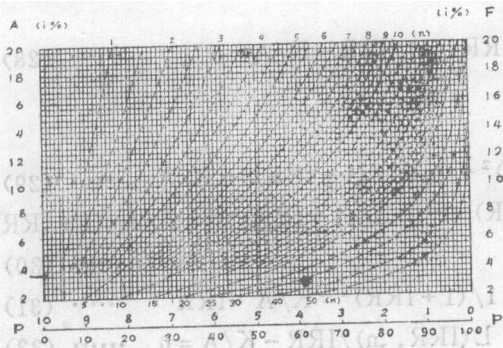


图 2

在图 2 中的坐标及曲线是根据实用的原则绘制的, 各参数值取值范围均考虑了投资项目动态评估实际需要。因此它是一种具有实用价值的诺模图, 称它为 L 诺模图。

2. 应用 L 诺模图求净现值(NPV)

例如某投资项目期初投资为 400 万元, 在后 9 年每年平均可获净收益为 80 万元, 期末残值为 90 万元, 已知资金成本率为 13%, 求该投资项目的净现值是多少?

解: 按年净收益贴现、残值贴现和净现值三个部分进行计算。

(1) 年净收益贴现

如图 3 所示, 在曲线网格图中由 $i\% = 13\%$ 作水平线与 $n = 9$ 曲线相交于 M 点, 过坐标原点作直线 $\overline{OM}$ 。在 A—P 坐标系中由 $A = 8$ (单位为 10 万元) 引水平线与 $\overline{OM}$ 直线相交于 E, 则 E 点横坐标 $P = 41$, 由于纵轴 A 单位为 10 万元, 则横轴 P 单位也为 10 万元。故年净收益贴现额为 410 万元。

(2) 残值贴现

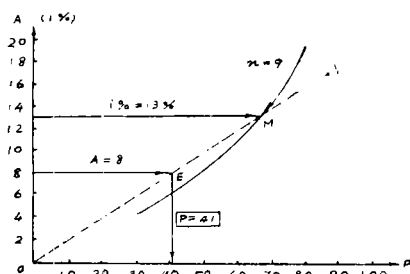


图 3

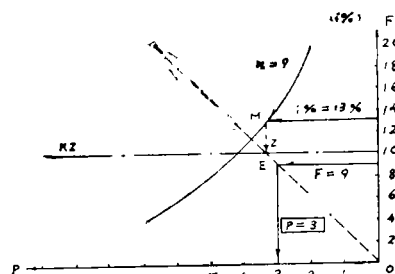


图 4

如图 4 所示, 在曲线网格图中由 $i\% = 13\%$ 作水平线与 $n = 9$ 曲线相交于 M 点, 过 M 点引垂线与控制水平线 KZ 相交于 Z 点, 连坐标原点得直线 $\overline{OZ}$, 在 F—P 坐标系中由 $F = 9.0$ (单位为 10 万元) 引水平线与 $\overline{OZ}$ 直线相交于 E, 则 E 点横坐标 $P = 3.0$, 由于纵轴 F 单位为 10 万元, 则横轴 P 单位也为 10 万元。故残值贴现金额为 30 万元。

(3) 净现值

净现值是年净收益与残值的贴现额之和和减去期初投资, 即

$$NPV = 410 + 30 - 400 = 40 \text{ (万元)}$$

故该投资项目净现值 (NPV) 为 40 万元。

3. 应用 L 诺模图求动态投资回收期

例如建设某电站贷款 600 万元为期初一次性投资额, 在后每年平均创净收益 150 万元, 贷款年利率为 11.0%, 求该电站投资项目的动态投资回收期是多少?

如图 5 所示, 在 A—P 坐标系中, 由投资 $P = 60$ (单位为 10 万元) 作垂线与净收益 $A = 15$ (单位为 10 万元) 水平线相交于 M 点, 过坐标原点作直线 $\overline{OM}$, 在曲线网格图中引 $i\% = 11\%$ 水平线与 $\overline{OM}$ 直线相交于 E, 则 E 点所在曲线坐标 $n = 5.5$, 即所求电站投资项目动态投资回收

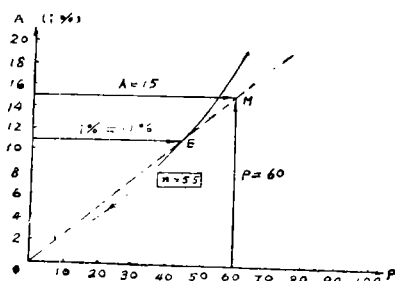


图 5

期为 5.5 年。

4. 应用 L 诺模图求内部收益率

例如某海运公司为了扩大海运业务, 欲以 6600 万元购回一艘海船, 该船平均每年可获净收益为 1360 万元。使用寿命为 12 年, 无残值, 求该公司购置海船的内部收益率是多少?

解: 如图 6 所示, 在 A—P 坐标系中, 由投资 $P = 66$ (单位为百万元) 作垂线与年净收益 $A = 13.6$ (单位为百万元) 水平线相交于 M 点, 过坐标原点作直线 $\overline{OM}$, 在曲线网格图中引 $n = 12$ 曲线与 $\overline{OM}$ 直线相交于 E, 则 E 点所在曲线网格图中纵轴坐标 $i\% = 17.7\%$, 它就是该海运公司购置海船的内部收益率 0.177。

5. 应用 L 诺模图求翻番指标

例如我国国民生产总值要求到本世纪末比 1980 年翻两番。在前我国国民生产总值是以每年 9% 增长速度增长, 试问在前多少年就实现了第一个翻番的目标, 在后又应具有怎样的增长速度才能实现到本世纪末再翻一番的目标?

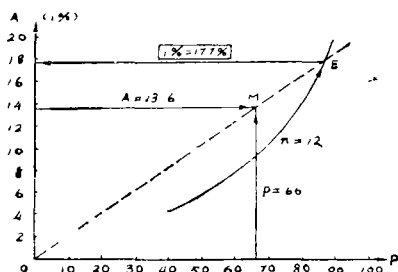


图 6

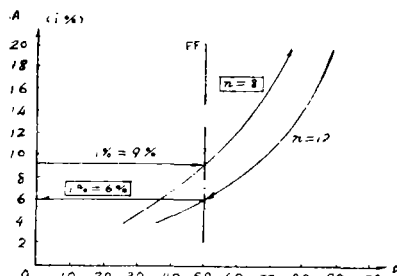


图 7

解: 如图 7 所示, 在曲线网格图中, 由 $i\% = 9\%$ 作水平线与图中翻番线 FF 相交, 交点所在曲线坐标 $n = 8$, 即在前 8 年以每年 9% 增长速度增长实现了翻一番的目标。

我国国民生产总值到本世纪末比 1980 年翻两番, 在前 8 年已实现了翻一番的目标, 于是在后 12 年再实现第二个翻番的目标。

如图 7 所示, 在曲线网格图中, 由 $n = 12$ 曲线与翻番线 FF 相交, 交点纵坐标 $i\% = 6\%$, 即在后 12 年中我国国民生产总值平均每年应以 6% 增长速度增长就能实现后一个翻番目标。

注释:

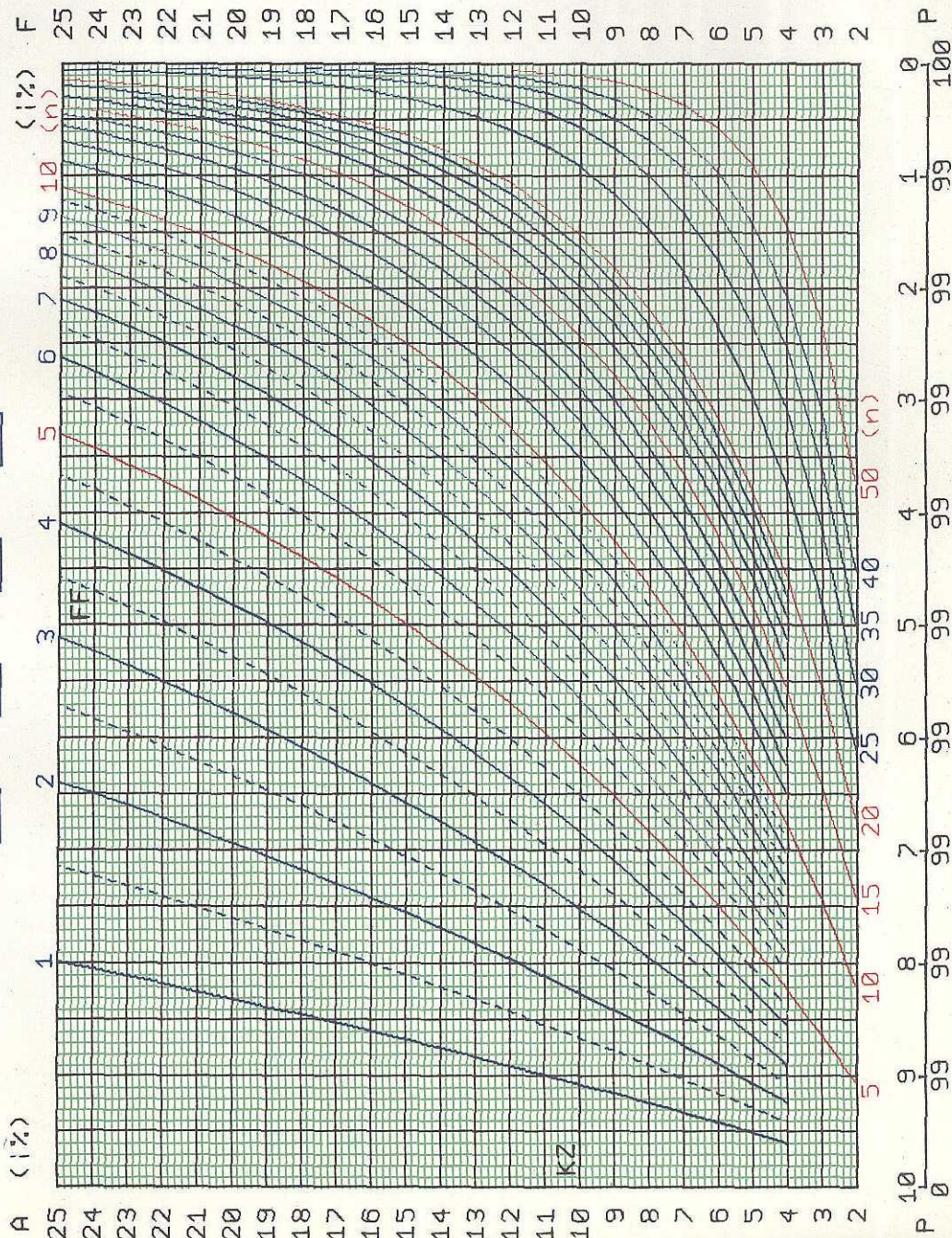
① 资金等值是指在时间因素的作用下, 在不同时点绝对值不等的资金可能具有相等的价值, 其充分且必要条件就是复利计算公式。

② 期末等额现金流是假定把现金流中资金流出流入的时点规定在计息周期期末的等额现金流。

③ 本文的贴现系数概念, 不同于一般文献中的贴现率的概念。

④ 期初等额现金流是假定把现金流中资金流出流入的时点规定在计息周期期初的等额现金流。

⑤ SHIZUO SENJU、TAMIO FUSHIMI、SEIICHI FUJITA 著, 孙炳华译, 《投资与经营决策的效益分析》, 清华大学出版社 1988 年 5 月出版。



武汉大学、能源部中南电力设计院联合研制

研制人：樊学林 李安南

武汉大学学报 赠

日一二三四五六 日一二三四五六

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31