# 市场波动时序中的非线性动力学性态

黄　沛　夏若虹

本文用混沌动力学的方法，从市场结构相关性角度，研究市场波动时序的内在性态，主要讨论了非线性相关类型的市场波动状态的发生、发展及相互转化问题，简要地论述了具有简单关系的非线性相关模型所反映的复杂动力学行为特点。这种研究，对从一个全新的角度去理解和探讨市场结构及市场波动现象，有着重要的意义。

## 一、引　言

人们通常认为，市场波动中大量繁杂的和类周期的观测数据，可以通过舍去随机涨落的办法来描述波动的变化轨迹。然而随机涨落可能起因于偶然事件，但更重要的是它也可能来自于决定性因素，这些决定因素起初局限在系统的一小部分，随后扩展开来，并引出一个新的宏观态。这正是具有反馈机制的非线性经济系统表现的行为特征。事实上，市场波动时序正是一个典型的类周期曲线，同时它也可看作某种非线性经济系统的表现行为。该系统一方面受制于环境的非平衡约束，另一方面更主要地取决于系统内部的相互作用。因此，从系统自身的相关性出发，去研究市场波动的复杂动力学行为是有可能的，并且还可以从那些随机的、噪声似的数据涨落中寻找更多的信息。本文主要对时序相关性模型进行研究，并探讨其中的非线性动力学性态。

## 二、相关模型

对于某特定的市场，其结构关系在一段时间内是相对稳定的，对应的市场参数的波动是这种结构的外在表现，即这些波动的数据间大体上应满足一定的结构规律。因此可以认为时序中后一位数据是前一位数据的映射。　　$x_{n+1}=Fx_n$

其中F为结构因子，$x_n$ 与 $x_{n+1}$ 为时间的函数。可以消去时间参数 t，将 $x_{n+1}$ 写成 $x_n$的迭代结果。

$$x_{n+1}=f(x_n) \qquad (1)$$

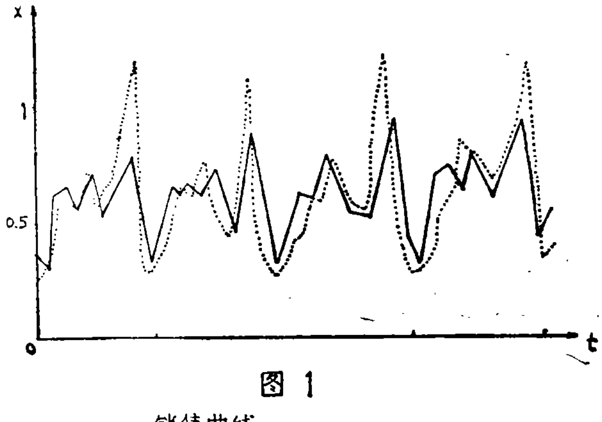


图 1

……… 销售曲线

—— 迭代曲线

下面我们就一个市场波动实例，通过一维模型的分析，来探讨此类非线性经济系统的复杂动力学行为及变化机制。

图1所绘出的是1984～1987年北京市蔬菜供应量的时序曲线。这是一个典型的市场波动曲线，它具有

类周期性质，即具有明显的周期行为但又不是上个周期的单调重复。可以看出此波动值是时间的复杂函数，该函数根本无法写出来，但在以下分析中，我们可以发现大部分参数间的关系却满足一个共同的简单的规律。

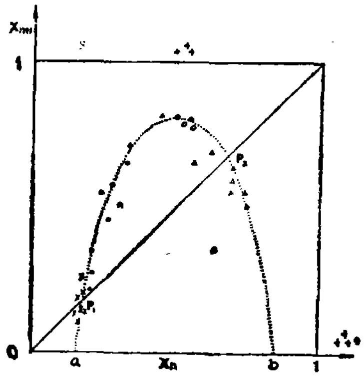


图 2

用分区递次振幅法①对时序数据进行处理，即对时序中具有相似性质的点依次按先后次序以x为横坐标，以 $x_{i+1}$ 为纵坐标在 Y—X 平面上描点。显然在时序中同性的点在此平面上被聚集到了一个特定的区域，这些不同的区域形成了一条明显的二次曲线（图2）。这说明时序数据间是相关的，这种相关性意味着此系统具有混沌动力学行为。写出此二次曲线的方程为：

$$y = k(x-a)(b-x) \tag{2}$$

式中 y 表示 $x_{n+1}$，x 表示 $x_n$，并且x为产量 x′ 经变换 $x=\frac{x'(\text{千斤})}{37.6}$ 而得，它是一个大于零小于1的变量。其中：

$$\left.\begin{array}{l} k=6.5 \\ a=0.1615 \\ b=1-a \end{array}\right\} \tag{3}$$

此方程的简单性是十分明显的，但这种简单的机制却可导致不同形式的复杂行为。因此研究这种机制和行为之间的关系，对于理解市场结构与波动行为之间的关系，可能是很有启示的。

## 三、动力学性态分析

（2）式中的迭代关系可用几何方式表示出来，即对图（2）作一条 y = x 恒等线，这样得到二个与 f(k, x)曲线的交点（即不动点）$p_1$ 及 $p_2$（图2）。其中：

$$p_1=\frac{k-1+\sqrt{(k-1)^2-4k^2ab}}{2k} \qquad p_2=\frac{(k-1)-\sqrt{(k-1)^2-4k^2ab}}{2k} \tag{4}$$

由（3）的数值可算出 $p_1 = 0.2142$，$p_2 = 0.6323$。

在 $p_1$ 和 $p_2$ 的邻域内分别任取一初始值 $x_{10}$ 与 $x_{20}$ 进行迭代，可发现其迭代值一次次地离该不动点越来越远。这一性质可用 p 点的切线斜率来说明。对（2）求一阶导，得：$f'(x) = k(1-2x)$ （5）

对于以上二个不动点可计算出：

$$f'(p_1) = k(1-2p_1) = 3.72>1 \qquad f'(p_2) = k(1-2p_2) = -1.72<-1$$

即二点均满足 $|f'(p)|>1$ 的非稳定不动点条件。

此类不动点被称为双曲排斥性不动点，或排斥子②。这说明该系统的时序永远不会趋于一个定常状态，而是趋于变化波动之中。

k 值决定了曲线 f(k, x)的形变程度，同时决定了不动点 $p_1$ 及 $p_2$ 的位置及切线斜率。根据混沌学定义，只有当 $|f'(p_i)|<1$ 时，其不动点 p 才是一个稳定不动点，或称为吸引子，即在某一 $x_N$ 之后会出现：

$$x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \cdots\cdots = x_\infty = p$$

由此对于（2）式在给定的 a、b 值的条件下，k 取值可分为三个区间：$0<k<3.79$，$3.79\leqslant k<5.55$，和 $k\geqslant 5.55$，分别用 $A_1$，$A_2$，$A_3$ 表示。

在 $A_1$ 内，f(k, x)与恒等线不相交，故不存在不动点。

在 $A_2$ 内，$p_1$ 的切线斜率 $|f'(p_1)|A_2>1$，说明 $p_1$ 在 $A_2$ 内始终是一个不稳定不动点。$p_2$ 的切线斜率 $|f'(p_2)|A_2<1$ 为一稳定不动点，其相图如图3所示。当 k 值逐渐增至5.55，进入 $A_3$ 时，$p_2$ 开始分叉，演

变为二个不动点，即周期 2，此时迭代值趋于在这二个点之间上下跳跃。我们写 f(k，x)的二次迭代方程为 $f^2(k, x)=f^0f$，将其与恒等线 $y=x$ 联立，其解即为新的不动点。对于所给定的各参数，可得出四个值：$p_1'=0.2142$，$p_2'=0.4360$，$p_3=0.6323$，$p_4'=0.71799$。其中 $p_1'$ 与 $p_3'$ 即为图 2 中的二个不动点 $p_1$，$p_2$。而 $p_2'$ 与 $p_4'$ 为一对非稳周期点。如图 4。此时新的周期点 $p_2'$ 与 $p_4'$ 的稳定性是相同的，稳定的条件③为：

$$|f'(k, p_2')\circ f'(k, p_4')|<1 \tag{6}$$

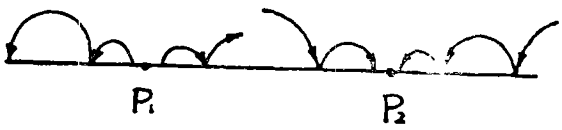


图 3

A2 区间的不动点相图示意

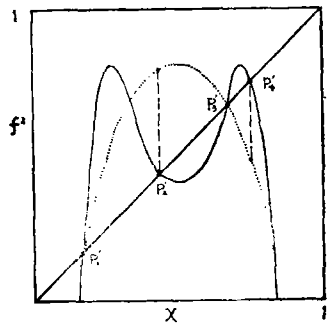


图 4

—— f²曲线 · f曲线

当k值进一步增大，倍周期现象便继续进行，一直到达混沌现象——所有周期同时存在。此时看起来似乎是连续分布在一定区间内的随机分布点——混沌带（chaos regime）却蕴含着一些周期窗口：从"无序"中自生出一种有序，将它放大后又是整个图案的重复，存在着无穷嵌套的自相似结构①⑤，这是与非线性经济系统的动力随机性密切相关的几何性质的表现。这说明此类非线性结构导致的市场"混沌"中，可以出现有序的自组织形式，当然这里先决条件是要选定一个合适的调控因子k。

## 四、讨论与体会

(1) 在前面的分析中，我们找到了调控因子的意义。在 $|f'(p)|<1$ 的区间内，随着k的增加，导致稳定不动点位置的变化，特殊地当系数 $a=0, b=1$ 时，这种变化成正比趋势，说明当 k 增大时，市场稳定水平增高。因此，可以将 k 理解为市场销售的增长率。一旦此增长率达到并进入非稳定区域，原来稳定的市场销售量就会发生波动，开始是周期的，随着k值增大，逐渐变为随机波动，这种波动表面看似乎是热噪声，但本质上仍是受市场结构f(k,x)所支配。此种"混乱"不会无限地继续下去，一旦k值适合，系统便产生自发有序行为，即市场波动落入一周期性的重复之中。由此可见，即使对应于同一个结构模式 f(k，x)，由于 k 值的变化，不仅引起行为性质的演变，而且决定了进入终态之前的趋近过程的长度。因此，在经济系统中，一种产品要想达到市场销售的最终稳定状态，选定合适的销售增长率是至关重要的。通过对 k 值的估计，可以判断市场波动的转折点和转折强度，从而达到预测和控制市场销售的目的。

(2) 结构因子 f(k，x)，即映射函数，在文中它以二次曲线形式出现，这只是一个特例(实际上，对于不同的市场结构或产品，f(k，x)的形式可以是其它形式，比如三次曲线，多次曲线等任何非线性形式。)。特殊地，当 $a=0$，$b=1$ 时，此二次曲线变为 $f(k, x)=kx(1-x)$，是著名的逻辑斯蒂差分方程。用差分方程描写经济系统比用微分方程描写容易理解。因为经济系统行为大多不是呈连续滑动的形式，而是从一状态跳到另一状态的跳跃历程。

### 参考文献


① HofsadterD. R. ：Chaotic behaviour in simple systems，Scientific American，No. 11，1981
② R. Devang，An Introduction to Chaotic Dynamicol System，1986 New York.
③ 钱伟长：《非线性力学的新发展——稳定性、分叉，突变、浑沌》，华中理工大学出版社1988年版，第121—130页。
④ Shaw R. ：Strange attractors，Chaotic behavior，and information flow，Z. Nature，1981
⑤ May R. M. ：Simple mathematical models with very complicted dynamics，Nature，P. 261，1976