关于系统Z的一些意见

张　清　宇

编者按:本刊1992年第6期刊发了张金成同志的《辩证逻辑形式化的研究》一文后,陆续收到了一些稿件,对张文展开了讨论。我们本着"百花齐放,百家争鸣"的宗旨,已在本刊第4期及本期发表了部分来稿。至此,对该文讨论暂告一段落。

系统Z出现在文[1]中,文[2]对它作了评价和补证。本文将论述我的看法和意见。

一、Z12在系统Z的公理中不是独立的

系统Z是在古典命题逻辑中加进否定词Z以及有关于Z的两个模式Z11和Z12而得,经研究,笔者发现Z12是可以从系统Z中其他公理推出来的,具体证明见下面的引理和定理。

令PC表示由Z1至Z10加上分离规则MP而得的系统,也就是古典命题逻辑系统;再令PC^+表示PC加上公理模式Z11而得的系统。

引理:在PC中,有下列定理模式和推理规则,

(1)$\neg A\rightarrow(A\vee B\rightarrow B)$;

(2)从$A\rightarrow(B\rightarrow C)$可推出$B\rightarrow(A\rightarrow C)$;

(3)从$A\rightarrow B$可推出$(C\rightarrow A)\rightarrow(C\rightarrow B)$;

(4)从$A\rightarrow(\neg B\rightarrow C)$可推出$A\rightarrow B\vee C$。

(证明从略。)

定理:在PC^+中,有下列定理模式.

(1)$(A\rightarrow B)\rightarrow(ZB\rightarrow ZA)$;

(2)$ZZA\rightarrow A\vee Z(A\vee ZA)$。

证明:

(1)1. $(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow ZB)\rightarrow ZA)$　　Z11

2. $(A\rightarrow ZB)\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow ZA)$　　引理(2)

3. $(ZB\rightarrow(A\rightarrow ZB))\rightarrow(ZB\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow ZA))$　　引理(3)

4. $ZB\rightarrow(A\rightarrow ZB)$　　Z1

5. $ZB\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow ZA)$　　3,4,MP

6. $(A\rightarrow B)\rightarrow(ZB\rightarrow ZA)$ 引理(2)

(2) 1. $(A\vee ZA\rightarrow ZA)\rightarrow(ZZA\rightarrow Z(A\vee ZA))$ 定理(1)

2. $(\neg A\rightarrow(A\vee ZA\rightarrow ZA))\rightarrow(\neg A\rightarrow(ZZA\rightarrow Z(A\vee ZA)))$ 引理(3)

3. $\neg A\rightarrow(A\vee ZA\rightarrow ZA)$ 引理(1)

4. $\neg A\rightarrow(ZZA\rightarrow Z(A\vee ZA))$ 2,3,MP

5. $ZZA\rightarrow(\neg A\rightarrow Z(A\vee ZA))$ 引理(2)

6. $ZZA\rightarrow A\vee Z(A\vee ZA)$ 引理(4)

所以，Z12 在系统 Z 中可以从其他公理导出，从而可知 $PC^{+}=Z$，也就是说系统 Z 等价于系统 PC^{+}。

有了上面的结果，我们可以很容易地建立起 Z 的 Fitch 型自然推理系统 NZ，以便更简捷地来推导 Z 的定理。

我们这样来表示一个推演：推演中用到的有穷多个公式自上而下排成一个序列，在这序列的左边划一条垂直线以示推演的起讫。如果这推演以若干公式为假设，则将它们排在序列的最初几个，并在最后一个假设公式的下面划一条跟垂直线连接的短横线。因此，我们有两种推演，一种是无假设的推演，见例(1)。

例(1) $\begin{array}{|l} A_1\\ A_2\\ \vdots\\ A_n \end{array}$

例(2) $\begin{array}{|l} A_1\\ \vdots\\ \text{—}\\ A_n\\ B_1\\ \vdots\\ B_m \end{array}$

例(3) $\begin{array}{|l} A_1\\ \vdots\\ \text{—}\\ A_n\\ B_1\\ \vdots\\ B_m\\ \begin{array}{|l} C_1\\ \vdots\\ C_k \end{array}\\ E_1\\ \vdots\\ E_l \end{array}$

另一种是有假设的推演，见例(2)，其中的公式 A_1、…、A_n 都是这推演的假设，公式 B_1、…、B_m 都是它们的后承。

允许在一推演中进行另一个推演(有假设的或无假设的都可以)，后者被称为前者的从属推演。如例(3)所示，其中公式 A_1 一直到公式 E_l 构成了一个有假设的推演，记为 D。在 D 中有一个垂直线，此垂直线右边的公式 C_1 至 C_k 也构成一条推演 D_1。D_1 就是 D 的一个从属推演。称公式 A_1、…、A_n、B_1、…、B_m、E_1、…、E_l 为 D 中的项，并称公式 C_1、…、C_k 为 D_1 中的项。一个推演可以有几个从属推演，从属推演也可以有它们自己的许多从属推演。

系统 NZ 的全部推理规则详述如下：

(0)Rep(重复规则)：一推演中的项可以在该项的正下方重复出现。

(1)Reit(重述规则)：如果公式 A 是一推演 D 的项，推演 D′ 是 D 的一个从属推演并位于 A

的正下方，则可以在 D' 的全部假设下重述 A。

(2)$\rightarrow$I(蕴涵引入)：如果在一推演 D 中有一个仅以公式 A 为假设的从属推演 D'，并且 B 是 D' 的项，则在 D 中可以推出 $A\rightarrow B$。

(3)$\rightarrow$E(蕴涵消去)：在一推演中，由 A 与 $A\rightarrow B$ 可推出 B。

(4)$\wedge$I(合取引入)：在一推演中，由 A 与 B 可推出 $A\wedge B$。

(5)$\wedge$E(合取消去)：在一推演中，由 $A\wedge B$ 可推出 A 和 B。

(6)$\vee$I(析取引入)：在一推演中，由 A 或 B 可推出 $A\vee B$。

(7)$\vee$E(析取消去)：在一推演中，由公式 $A\vee B$、$A\rightarrow C$ 和 $B\rightarrow C$ 可推出 C。

(8)$\neg$(古典否定)：如果一推演 D 中有一个仅以 $\neg A$ 为假设的从属推演 D'，并且 D' 中有项 B 和项 $\neg B$，则在 D 中可推出 A。

(9)Z(非古典否定)：如果一推演 D 中有一个仅以公式 A 为假设的从属推演 D'，并且 D' 中有项 B 和 ZB，则在 D 中可推出 ZA。

称 A 为 NZ 的一个定理，记成 $\vdash_{NZ}A$，当且仅当有一个无假设的推演以 A 为一项。称 A 为公式集 Γ 的一个后承，记成 $\Gamma\vdash_{NZ}A$，当且仅当有一个仅以 Γ 中若干公式为假设的推演以 A 为一项。系统 NZ 等价于系统 Z，即，$\Gamma\vdash_{NZ}A$ 当且仅当 $\Gamma\vdash_{Z}A$。当 Γ 为空集时我们有，$\vdash_{Z}A$ 当且仅当 $\vdash_{NZ}A$。

二、系统 Z 等价于一个正规模态系统

在系统 Z 中，我们可以引进如下定义：

$\Diamond A=_{df}\neg ZA$，

$\Box A=_{df}\neg\Diamond\neg A$。

利用自然推理的方法，不难证明在系统 Z 中有下列两个定理模式，具体证明从略。

定理：(1) $\vdash_{Z}\Box(A\rightarrow B)\rightarrow(\Box A\rightarrow\Box B)$；

(2) $\vdash_{Z}\Diamond A\rightarrow A$。

令 K^+ 表示 PC 附加上述两个模式为公理模式而得的系统。关于系统 K^+，我们有下面的结果。

定理：在系统 K^+ 中，有下列定理模式，

(0) $(A\rightarrow ZA)\rightarrow ZA$；

(1) $A\rightarrow\Box A$；

(2) $(A\rightarrow B)\rightarrow(\Diamond A\rightarrow\Diamond B)$；

(3) $B\wedge\Diamond A\rightarrow\Diamond B$；

(4) $(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow ZB)\rightarrow ZA)$。

证明：

(0).	1、$\Diamond A\rightarrow A$	K^+的公理
	2、$\Diamond A\rightarrow\Diamond A$	PC 的定理
	3、$(\Diamond A\rightarrow A)\rightarrow((\Diamond A\rightarrow\Diamond A)\rightarrow(\Diamond A\rightarrow A\wedge\Diamond A))$	PC 的定理
	4、$(\Diamond A\rightarrow\Diamond A)\rightarrow(\Diamond A\rightarrow A\wedge\Diamond A)$	1,3,MP
	5、$\Diamond A\rightarrow A\wedge\Diamond A$	2,4,MP
	即，$\neg ZA\rightarrow A\wedge\neg ZA$	

6、$A\wedge\neg ZA\rightarrow\neg(A\rightarrow ZA)$ PC 的定理

7、$\neg ZA\rightarrow\neg(A\rightarrow ZA)$ 5,6,→传递

8、$(\neg ZA\rightarrow\neg(A\rightarrow ZA))\rightarrow((A\rightarrow ZA)\rightarrow ZA)$ PC 的定理

9、$(A\rightarrow ZA)\rightarrow ZA$ 7,8→传递

(1). 1、$\Diamond\neg A\rightarrow\neg A$ K^+的公理

2、$(\Diamond\neg A\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow\neg\Diamond\neg A)$ PC 的定理

3、$A\rightarrow\neg\Diamond\neg A$ 1,2,MP

即，$A\rightarrow\Box A$

(2). 1、$(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$ PC 的定理

2、$(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow\Box(\neg B\rightarrow\neg A)$ (1)

3、$\Box(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(\Box\neg B\rightarrow\Box\neg A)$ K^+的公理

4、$(\Box\neg B\rightarrow\Box\neg A)\rightarrow(\neg\Box\neg A\rightarrow\neg\Box\neg B)$ PC 的定理

5、$(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg\Box\neg A\rightarrow\neg\Box\neg B)$ 1,2,3,4,→传递

即，$(A\rightarrow B)\rightarrow(\Diamond A\rightarrow\Diamond B)$

(3). 1. $B\wedge\Diamond A\rightarrow B$ Z4

2. $B\rightarrow(A\rightarrow B)$ Z1

3. $(A\rightarrow B)\rightarrow(\Diamond A\rightarrow\Diamond B)$ (2)

4. $B\wedge\Diamond A\rightarrow(\Diamond A\rightarrow\Diamond B)$ 1,2,3,→传递

5. $(B\wedge\Diamond A\rightarrow(\Diamond A\rightarrow\Diamond B))\rightarrow(B\wedge\Diamond A\rightarrow\Diamond B)$ PC 的定理

6. $B\wedge\Diamond A\rightarrow\Diamond B$ 4,5,MP

(4). 1. $B\wedge\Diamond A\rightarrow\Diamond B$ (3)

即，$B\wedge\neg ZA\rightarrow\neg ZB$

2. $(B\wedge\Diamond A\rightarrow\Diamond B)\rightarrow(B\rightarrow(\neg ZA\rightarrow\neg ZB))$ PC 的定理

3. $B\rightarrow(\neg ZA\rightarrow\neg ZB)$ 1,2,MP

4. $(\neg ZA\rightarrow\neg ZB)\rightarrow(ZB\rightarrow ZA)$ PC 的定理

5. $B\rightarrow(ZB\rightarrow ZA)$ 3,4,MP

6. $(B\rightarrow(ZB\rightarrow ZA))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow(ZB\rightarrow ZA)))$ PC 的定理

7. $(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow(ZB\rightarrow ZA))$ 5,6,MP

8. $(A\rightarrow(ZB\rightarrow ZA))\rightarrow((A\rightarrow ZB)\rightarrow(A\rightarrow ZA))$ PC 的定理

9. $(A\rightarrow ZA)\rightarrow ZA$ (0)

10. $((A\rightarrow ZA)\rightarrow ZA)\rightarrow(((A\rightarrow ZB)\rightarrow(A\rightarrow ZA))\rightarrow((A\rightarrow ZB)\rightarrow ZA))$ PC 的定理

11. $((A\rightarrow ZB)\rightarrow(A\rightarrow ZA))\rightarrow((A\rightarrow ZB)\rightarrow ZA)$ 9,10,MP

12. $(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow ZB)\rightarrow ZA)$ 7,8,11,MP

上面的结果表明，系统 **Z**。等价于系统 K^+。由 $\vdash_{K^+}A\rightarrow\Box A$ 和分离规则可知，必然概括规则（从 A 可推出$\Box$A）在系统 K^+ 中成立。因而，系统 K^+ 是一个正规模态系统。所以，系统 **Z** 等价于一个正规模态系统。

文[1]中的定义 7 把系统 **Z** 的模型定义为一个有序的二元组⟨a,V⟩，但该定义的 Ⅰ 中说“a 是一个世界”而 Ⅱ 中则说“a 是两个世界”。这样的定义是无法用的，更无法说它是什么世界模型。文[2]中说什么“它非常象复变函数论里的螺旋式的‘黎曼面’，具有分叶的结构”，这就更不恰当了。

真要为系统Z建立可能世界语义，可以利用它等价于正规模态系统K^+，由模态逻辑的克里普克语义理论引出如下的定义。

定义：$\mu=\langle W,R,V\rangle$是系统Z的一个克里普克模型(或简称模型)，当且仅当：

(1)W是一个集合(W中的元素可以称为"可能世界"、"世界"、或者"点")；

(2)R是集合W上的一个二元关系(即，$R\subseteq W\times W$)，并且使得$\forall_w(wRw\vee\neg\exists w'(wRw'))$；

(3)V是一个映射，它确定各个命题变项p在各个可能世界w中的真值$V(p,w)\in\{0,1\}$。

这定义中的R就是可能世界之间的相对可能关系，w_1Rw_2表示世界w_2相对于世界w_1是可能的。w_1Rw_2也可以有其它种种读法，例如读成"w_2可以替代w_1"、"w_1可接近w_2"或者"w_1可达w_2"等。W中的点因R所满足的条件而可分为两类，一类中的点可以自己接近自己但不可以接近其它任何点，另一类点既不可接近自己也不可接近其它任何点。前一类点相当于文[1]中的"原世界"，但不一定是一个，而是一类。后一类点相当于文[1]中的"超越世界"，在专著[3]中称它们为"死点"(dead ends)。

给定一个模型$\mu=\langle W,R,V\rangle$，我们就能唯一地确定其各个命题A在各个世界w中的真值V(A,w)：

$V(\neg B,w)=1$ 当且仅当 $V(B,w)=0$；

$V(B\wedge C,w)=1$ 当且仅当 $V(B,w)=V(C,w)=1$；

$V(B\vee C,w)=1$ 当且仅当 $V(B,w)=1$ 或 $V(C,w)=1$；

$V(B\rightarrow C,w)=1$ 当且仅当 $V(B,w)=0$ 或 $V(C,w)=1$；

$V(ZB,w)=1$ 当且仅当 $\forall w'(wRw'\rightarrow V(B,w')=0)$。

$V(A,w)=1$可以读成"A在w中为真"，$V(A,w)=0$可以读成"A在w中为假"。给定一个模型$\mu=<W,R,V>$，如果命题A在W中的任一个可能世界w中都为真，则称A在模型μ中有效，记成$\mu\models A$。如果A在任一个模型中都有效，则称A为(普遍)有效，记成$\models A$。

利用克里普克语义理论中的典范模型方法(the method of canonical models)，不难证得系统Z的完全性。

完全性定理：$\vdash_Z A$当且仅当$\models A$。

具体证明从略，有兴趣的读者可以参看专著[3]。

从模态逻辑的克里普克语义理论可知，

$V(\neg\Diamond A,w)=1$ 当且仅当 $\neg\exists w'(wRw'\wedge V(A,w')=1)$

当且仅当 $\forall w'(wRw'\rightarrow V(A,w')=0)$

当且仅当 $V(ZA,w)=1$。

因此，A的"辩证否定"ZA跟不可能命题$\neg\Diamond A$的意义相同。所以，系统Z中的否定词Z只是一个否定模态词$\neg\Diamond$。如果认为这样的系统"完全有资格被称为辩证逻辑的一种形式系统"，那恐怕是完全不可靠的。

三、也论系统Z和科斯塔的系统

巴西逻辑学家科斯塔(Newton C · A · da Costa，1929年9月26日生)是弗协调逻辑(paraconsistent logic，文[2]译作"次协调逻辑")分支的创造人，他构作逻辑系统C_n是想为有意义的不协调理论提供逻辑基础，他只要求C_n满足下列四个条件：

(1)矛盾律不普遍成立；

(2)从互相矛盾的前提不推出任何公式；

(3)从命题部分到谓词部分的扩张必须简单直接；

(4)必须包括尽可能多的古典逻辑中的模式和规则，只要是不与前面条件相冲突的就应当包括进来。

很显然，科斯塔构作系统 C_n 的目的并不是为了“对传统辩证法原型进行逻辑重建”。这一点从他在文[4]中最后一段有关于辩证逻辑形式化的论述来看，将显得更为明确。在那一段落中，他说：“辩证逻辑跟不协调系统的理论密切相关。辩证逻辑有若干冲突的概念，而且对大多数专家来说它既不是形式的，甚至原则上也不是可形式化的。然而，利用不协调系统的理论中所用的技术，形式化一些已经提出来的辩证逻辑显然还是有可能的。顺便讲一下，我们正在谈论的形式化事实上类似于为直觉主义数学各个部分所作的形式化：我们并不打算在所作的形式学说上建立辩证逻辑，而仅想弄清‘辩证运动’的‘规律性’。这样，我们也许可以重新阐明辩证逻辑。”科斯塔从来也没有说过他的系统 C_n 是“辩证逻辑的部分形式化”。构作系统 **Z** 的目的是不同的，从一开始就是为了“建立一个新的逻辑系统，以实现辩证逻辑的部分形式化”。因此，文[2]中所说“我们认为，在对传统辩证法原型进行逻辑重建方面，系统 **Z** 比起系统 C_n 或 **DL** 来又前进了一步”，似乎是不大妥当的，至少就 C_n 而言是如此，至于对 **DL** 是如何又当别论。

虽然不宜从“对传统辩证法原型进行重建方面”来比较系统 **Z** 和 C_n，但从否定词方面来说明它们的相似和相异之处还是可以的。

系统 **Z** 和 C_n 都涉及两种否定词，古典的和非古典的。但在系统 **Z** 中这两种否定词都是初始的，而在 C_n 中古典否定词则由非古典否定词定义为 $\neg^{(n)}$，$\neg^{(n)}$ 的具体定义见[4]。系统 C_n 是在古典的正命题逻辑上添加关于非古典否定词的新公理而得，而系统 **Z** 则是古典命题逻辑的扩展。$\neg^{(n)}$ 在系统 C_n 中具有古典否定词的全部性质，将古典否定词转换成 $\neg^{(n)}$，古典命题逻辑的定理就都被转换面 C_n 的定理。所谓 C_n 包含古典命题逻辑就是在这种转换意义下说的，这跟系统 **Z** 直接为古典命题逻辑的扩展是不相同的。系统 **Z** 以古典命题逻辑为子系统，C_n 不能直接以古典命题逻辑为子系统，后者可以转换成 C_n 的一个子系统。

笔者曾经建立古典命题逻辑的否定词扩展系统 Z_n，它所涉及的非古典否定词相当于系统 C_n 的否定词。以 Z_n 为代表来比较系统 **Z** 和 C_n 二者的非古典否定词，将更能说明问题。用 **N** 表示 C_n 的非古典否定词，系统 Z_n 就由古典命题逻辑的语言附加 **N** 为初始符号而得。Z_n 的公理系统是由古典命题逻辑的公理系统附加下列模式而得：

(1) $\neg A \rightarrow NA$，

(2) $B \wedge \neg^{(n)} B \rightarrow NA$，

(3) $NNA \rightarrow A$，

(4) $\neg^{(n)} \rightarrow \neg A$，

(5) $A^{(n)} \wedge B^{(n)} \rightarrow (A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)} \wedge (A \rightarrow B)^{(n)}$。

这里的 $\neg^{(n)}$ 如上述，$\neg$ 指古典否定词，$A^{(n)}$ 的定义见文[4]。可以证明，$\neg^{(n)} A \leftrightarrow \neg A$ 是系统 Z_n 的定理，不过等值置换规则在 Z_n 中不普遍成立，但对于不含有 N 的公式还是成立的。上面的(1)、(2)、(3)三个模式表明了非古典否定词的全部特性，它们可以分别读成“A 假则否定 A”、“逻辑矛盾否定一切”和“否定之否定是肯定”。

从本文第一部分的证明可知，系统 **Z** 的非古典否定词 **Z** 只接受一个归谬律：

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow ZB) \rightarrow ZA)$

很容易证明，这个归谬律等值于下面的(1)加上(2)：

(1)$\neg A \to ZA$，

(2)$B \wedge ZB \to ZA$。

(1)和(2)可以分别读成“A假则否定A”和“(辩证)矛盾否定一切”。由此可见，系统 **Z** 和 $\mathbf{Z_n}$ 都接受有关于否定词的一个基本态度“A假则否定A”，此外系统 **Z** 还接受基本态度“矛盾否定一切”但拒绝基本态度“否定之否定是肯定”，而系统 $\mathbf{Z_n}$ 则拒绝“矛盾否定一切”但保留“逻辑矛盾否定一切”并接受“否定之否定是肯定”的基本态度。所以，系统 **Z** 和系统 $\mathbf{Z_n}$ 作为古典逻辑的否定词扩展对于否定词的态度是有同也有异的。

由关于 **Z** 的归谬律可得系统 **Z** 的下列三个定理：

(1)$(A \to B) \to (ZB \to ZA)$，

(2)$A \vee ZA \leftrightarrow Z(A \wedge ZA)$，

(3)$B \wedge ZB \to ZA$。

它们有一个共同的结论为：

$B \wedge ZB \to Z(A \wedge ZA)$。

按文[1]和[2]的说法，这结论表明：“辩证矛盾将辩证否定一切辩证矛盾”。这样的结论很不利于保留系统 **Z** 的“辩证逻辑形式系统”资格。要认真建立辩证逻辑的形式系统，必须对归谬律持保留态度。科斯塔和沃尔夫构造的系统 **DL** 把归谬律限制在遵守矛盾律的情况下，使得上面的(1)、(2)和(3)都不是 **DL** 的定理。这样做很不错，很符合黑格尔和马克思不否认古典逻辑对一大类命题有效的精神。因此，“在对传统辩证法原型进行逻辑重建方面，系统 **Z** 比起系统 $\mathbf{C_n}$ 或 **DL** 来又前进了一步”的说法是很不妥当的。

综上所述，系统 **Z** 只是命题逻辑的一个正规否定词扩展，它等价于一个正规模态系统；非古典否定词 Z 同于否定模态词$\neg\Diamond$，不宜解作辩证否定，“辩证逻辑形式化的新进展”的提法是缺乏根据的。

参 考 文 献

[1] 张金成：《对辩证逻辑形式化的研究》，《武汉大学学报》(社会科学版)，1992年第6期。

[2] 陈晓平和桂起权：《辩证逻辑形式化的新进展》，《武汉大学学报》(社会科学版)，1992年第6期。

[3] Hughes, G • E • and Cresswell, M • J • ; 1984. A Companion to Modal Lodgic, Methuen.

[4] da Costa, Neeton C • A • ; 1974. “On the Theory of Inconsistent Formal Systems”, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. 15, pp. 497—510.

[5] da Costa, N • C • A and Wolf, R • G; 1980. ‘Studies in Paraconsistent Logic I; The Dialectical Principle of the Unity of Oppositics’, Philosohia 9, pp. 189—217.

(本文责任编辑　彭昌林)