论辩证逻辑的形式系统Z与ZT的超协调性

张　金　成

本文先着重从超越世界的语义学角度，讨论辩证逻辑形式系统Z的超协调性。进而在系统Z的基础上建立一个句法上扩展的超协调系统ZT。在系统ZT内进一步阐明辩证否定的逻辑性质。

近几十年来，国际逻辑学界有一种新的思潮，即对非协调理论的研究，并提出若干形式系统以及处理矛盾的方法。其中最著名的是达科斯塔的次协调逻辑。在我们看来，这些系统虽然具备某种有意义的不协调性，但是，它们离现实世界中本来存在着的辩证矛盾及其规律性仍有相当的距离，有待于进一步改善。

我在《对辩证逻辑形式化的研究》一文中，引进了一个新的辩证否定词"Z"，并对辩证否定引进了两条新公理：$(A\rightarrow B)\rightarrow[(A\rightarrow ZB)\rightarrow ZA]$和$ZZA\rightarrow A\vee Z(A\vee ZA)$。把此两条公理加入经典逻辑系统之中，得到一个新的系统Z。在系统Z的语义解释中，引进两个世界即原世界和超越世界。系统Z有着一种特殊的不协调性，即我们所谓的"超协调性"。这里我们将对这种超协调性作深入分析，进而建立一个新的超协调系统ZT。

一、系统Z的独立语义超协调性

不协调性与不相容性同义。系统的不相容性是与相容性直接相对应的。通常所说的系统的相容性有两种：一是句法相容性；二是语义相容性。即：如果系统之中不存在这样的合式公式，它与它的否定都是系统的定理，则这个系统是句法相容的；如果一个系统的所有定理在其语义解释中都是真的，则该系统是语义相容的(亦即是可靠的)。反之，A与非A都是同一系统的定理，这个系统就是句法不相容的；若有一定理解释为假，这个系统就是语义不相容的。现在我们在这两种相容性之外再引进一种新的相容性(亦即协调性)，这就是我们所谓的"独立语义协调性"。

定义1：一系统是独立语义协调的，当且仅当，该系统的语义解释使得任一公式A与其否定非A不可能同真或同假。

据此定义，如果一系统的语义解释使得某一公式A与其否定非A至少在一个可能世界中同真或同假，那么，该系统是独立语义不协调的。我们即将表明，系统Z的语义解释使得某些公式A与其否定ZA在超越世界中同真；所以，系统Z是独立语义不协调的。

在系统Z中，由于存在着两种否定词$\neg$和Z，所以，句法不协调性和独立语义不协调性也都存在两种情况。

定义2：由经典否定词$\neg$构成的矛盾即A与$\neg A$，我们称之为"经典矛盾"，简写为：C—矛盾。由辩证否定词Z构成的矛盾即A与ZA，我们称之为"辩证矛盾"，简写为Z—矛盾。

定义3：由A与$\neg A$产生的不协调性，我们称之为"经典不协调性"，简写为：C—不协调。由A与ZA产生的

不协调性，我们称之为“辩证不协调性”，简写为：Z－不协调。与C－不协调和Z－不协调相对应的分别是经典协调即C－协调和辩证协调即Z－协调。

通常将超协调(trans —consistent)规定为，系统内存在一种不平凡的矛盾，它不会使系统内任何公式成为定理。Z－矛盾符合这一条件。

定义4：Z－不协调也叫做“Z－超协调”。

定义5：若一系统具备任何一种超协调性，则称之为“超协调系统”。

由于经典逻辑中只有一种否定词，因此经典逻辑只涉及C－协调性而不涉及超协调性。我们知道，经典逻辑既是句法C－协调的，也是独立语义C－协调的；因为没有任何C－矛盾即$\neg A$和A均为它的定理，或者有可能均为真。与之不同，系统Z所含的两种否定词使它既涉及C－协调性又涉及超协调性。那么，系统Z在这两种协调性上情况如何呢？这就是以下所要讨论的主要问题。

系统Z的语义是两个不同世界语义的合取。根据系统Z语义解释中各种联结词的赋值，我们可以分别按照两个世界列出各个联结词的真值表。

在原世界$\neg$中各个联结词的真值表是：(表1　表2)

表1

A	$\neg$A	ZA
1	0	0
0	1	1

表3

A	$\neg$A	ZA
1	0	1
0	1	1

定义6：系统Z之中若有一合式公式R，恒有$V(R,\neg)=1$；即在原世界之中对R的命题变项作任何取值，R恒为真；则我们把R叫作原世界中的永真式，其集合记为：$K_{\neg}$。

定理1(原世界语义协调性定理)：系统Z中可推证命题皆为原世界中的永真式；即若$\vdash R$则$V(R,\neg)=1$，$R\in K_{\neg}$。

定理2(原世界语义不完全性定理)：在系统Z之中，并非所有原世界的永真式皆可证；即存在$R\in K_{\neg}$但$\nvdash R$。(如：$ZZA\rightarrow A$)。

定理3(原世界语义可判定性定理)：对于系统Z中的任一合式公式，皆可判定其是否为原世界的永真式。

定理4(原世界独立语义协调性定理)：无论C－矛盾，还是Z－矛盾，在原世界语义解释下皆为一真一假。

以上定理极易证明，这里不再列出过程。

在超越世界Z中，各个联结词的真值表是：(表3　表4)

表2

A	B	$A\vee B$	$A\wedge B$	$A\rightarrow B$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

表4

A	B	$A\vee B$	$A\wedge B$	$A\rightarrow B$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

对比两个世界的真值表，我们看到，$\neg$、$\vee$、$\wedge$、$\rightarrow$的解释皆相同，仅仅是Z在超越世界中起了变化。

定义7：系统Z中若有一合式公式R，恒有$V(R,Z)=1$；即在超越世界之中，对R的命题变项的任何取值，总使得R命题为真，则我们把R叫做超越世界的永真式，其集合记为：K_Z。

定理5(超越世界语义协调性定理)：系统Z的可推证命题皆为超越世界的永真式；即若$\vdash R$则$V(R,Z)=1$，$R\in K_Z$。

定理 6(超越世界语义不完全性定理):系统 Z 之中,并非所有的超越世界的永真式皆可推证;即存在 $R\in K_Z$,但 $\nvdash R$。(如,ZA)

定理 7(超越世界语义可判定性定理):系统 Z 的任一合式公式皆可判定其是否超越世界的永真式。

定理 8(超越世界独立语义 C—协调性定理):C—矛盾即 A 与 $\neg$A 在超越世界中必为一真一假。(这一点可由表 3 的前二列看出。)

定理 9(超越世界独立语义超协调性定理):Z—矛盾即 A 与 ZA 在超越世界中可以同真。(这一点可由表 3 的第一列和第三列看出。)

有些合式公式在原世界中永真,但在超越世界中非永真;另外一些合式公式在超越世界中永真,但在原世界中非永真。系统 Z 的永真式必须同时在两个世界中皆为永真。在表 5 中我们将这三种公式的部分公式加以对比。

表 5

序号	合式公式	原世界	超越世界	系统 Z
非永真	$ZZA\rightarrow A$	永真		非永真
2	$Z\neg A\rightarrow ZZA$	永真	永真	永真
3	$Z(A\vee ZA)$	非永真	永真	非永真
4	$ZA\rightarrow\neg A$	永真	非永真	非永真
5	$\neg A\rightarrow ZA$	永真	永真	永真
6	$Z(A\wedge B)\leftrightarrow ZA\vee ZB$	永真	永真	永真
7	$A\rightarrow ZA$	非永真	永真	非永真
8	$\neg(A\vee ZA)$	非永真	非永真	非永真
9	ZB	非永真	永真	非永真
10	$ZA\rightarrow(A\rightarrow B)$	永真	非永真	非永真

若把系统 Z 的永真式集合记为 K,则有:

定理 10:$K=K_{\neg}\cap K_Z$

根据定义 1 我们知道,一个系统只要相对于一个可能世界是独立语义超协调的,那么,这个系统就是独立语义超协调的;而定理 9 告诉我们,系统 Z 相对于超越世界是独立语义超协调的;由此可得:

定理 11:系统 Z 是独立语义超协调的。

定理 12:系统 Z 是一个超协调系统。(根据定义 5)

以上定理 5~12 也容易证明,这里不再列出具体过程。

二、系统 ZT 的句法超协调性

从以上讨论中我们看到,Z 之所以是一个超协调系统,仅仅由于 Z 是独立语义超协调的。然而,系统 Z 在句法上却是协调的,具体地说,Z 在句法上既是 C—协调的又是 Z—协调的。从语义上看,系统 Z 是两个世界即原世界与超越世界的合取。如果我们抛开原世界而只采用超越世界,那么,与之相应的是另一个系统,我们称之为 ZT。我们将表明,ZT 不仅是独立语义超协调的,而且是句法超协调的。下面我们就给出这一系统。

系统 ZT 的许多内容与系统 Z 相同。但为了保持论述的完整性,我们仍给出 ZT 的全部公理、定义和规则,具体如下:

Ⅰ:初始符号

1. 命题变项：$p_1, p_2, \cdots p_i \cdots (i=1、2、3、\cdots)$

2. 联结词：$\vee, \wedge, \neg, Z$；　　3. 括号：(，)、[，]；

Ⅱ：形成规则

1. 任一命题 p_i 是合式公式。

2. 如果 A 是合式公式，则 $\neg A$，ZA 也是合式公式。

3. 如果 A，B 是合式公式，则 $A \to B$，$A \vee B$，$A \wedge B$ 也是合式公式。

4. 所有的合式公式由 1、2、3 给出。

Ⅲ：定义

1：$A \leftrightarrow B =_{def} (A \to B) \wedge (B \to A)$　　2：$SA =_{def} \neg Z \neg A$

Ⅳ：公理系统

ZT1：$A \to (B \to A)$

ZT2：$[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$

ZT3：$A \to (B \to A \wedge B)$

ZT4：$(A \wedge B) \to A$

ZT5：$(A \wedge B) \to B$

ZT6：$A \to A \vee B$

ZT7：$B \to A \vee B$

ZT8：$(A \to C) \to [(B \to C) \to (A \vee B \to C)]$

ZT9：$(A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \neg A]$

ZT10：$\neg\neg A \to A$

ZT11：$(A \to B) \to [(A \to ZB) \to ZA]$

ZT12：$A \to ZA$

Ⅴ：推理规则

分离规则（MP）：如果 A，$A \to B$ 是定理，则 B 也是定理。

定义 8：由以上Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ五个部分所组成的形式系统，叫做超越世界辩证逻辑系统，简称“系统 ZT”。

由系统 ZT 推出的定理，我们在 $\vdash$ 下加注标记“ZT”即

定理 1：$\vdash_{ZT} A \to (ZA \to ZB)$

证：

1：$A, ZA, B \vdash_{ZT} A$

2：$A, ZA, B \vdash_{ZT} ZA$

3：$A, ZA \vdash_{ZT} ZB$ （1、2、ZT11）

4：$\vdash_{ZT} A \to (ZA \to ZB)$　　（3）

“定理 1”与系统 Z 之中的“定理 5”是同一定理。

定理 2：$\vdash_{ZT} ZB$（超越律）

证：

1：$\vdash_{ZT} A \to (ZA \to ZB)$ （Th1）　　2：$\vdash_{ZT} (A \to ZA) \to [Z(A \to ZA) \to ZB]$　（1，把 A 换以 $A \to ZA$）

3：$\vdash_{ZT} A \to ZA$　　（ZT12）

4：$\vdash_{ZT} (A \to ZA) \to Z(A \to ZA)$　　（3：把 A 换以 $A \to ZA$）

5：$\vdash_{ZT} Z(A \to ZA)$　　（3，4，MP）

6：$\vdash_{ZT} Z(A \to ZA) \to ZB$　　（3，2，MP）

7：$\vdash_{ZT} ZB$　　（5，6，MP）

定理 3：$\vdash_{ZT} ZZA \to A \vee Z(A \vee ZA)$　（否定之否定律）

证：

1：$\vdash_{ZT} Z(A \vee ZA)$　　（TH2，把 B 换以 $A \vee ZA$）

2：$\vdash_{ZT} A \vee Z(A \vee ZA)$　　（1，ZT7）

3：$\vdash_{ZT} A \vee Z(A \vee ZA) \to [ZZA \to A \vee Z(A \vee ZA)]$　　（ZT1）

4：$\vdash_{ZT} ZZA \to A \vee Z(A \vee ZA)$　　（2，3，MP）

“定理 3”即为系统 Z 的“Z12”，所以系统 ZT 可看作在系统 Z 之上加上公理“$A \to ZA$”之后的拓展。

定理 4：如果 A 是系统 ZT 的定理，则 $A \wedge ZA$ 也是系统 ZT 的定理。证：

由题设知 $\vdash_{ZT} A$，由"超越律"可知 $\vdash_{ZT} ZA$ 结合以上两式即有 $\vdash_{ZT} A \wedge ZA$

由定理 4 易得：

定理 5：$(A \vee \neg A) \wedge Z(A \vee \neg A)$（超排中律）

定理 6：$(A \rightarrow A) \wedge Z(A \rightarrow A)$（超同一律）

定理 7：$(\neg(A \wedge \neg A)) \wedge Z(\neg(A \wedge \neg A))$（超矛盾律）

定理 5－7 说明古典系统中的排中律、同一律、矛盾律皆是可超越的。

"$A \rightarrow ZA$"是一弱矛盾蕴涵式，在上文"原世界"与"超越世界"永真式对比表中的"序号 7"中，我们可以看出，$A \rightarrow ZA$ 在原世界解释下是非永真式，而在超越世界语义解释下是永真式；因此，系统 ZT 只采用超越世界语义解释。这里我们不再作严格定义，而直接引用前文超越世界真值表，可获得系统 ZT 的以下元逻辑性质。

定理 8：（独立语义超协调性）：系统 ZT 中存在一个公式 A 与其否定 ZA 皆为真。（如：$A \vee \neg A$）和 $Z(A \vee \neg A)$）

定理 9：（句法超协调性定理）：系统 ZT 之中存在一公式 A 与其否定式 ZA，皆为定理（如：$A \rightarrow ZA$ 与 $Z(A \rightarrow ZA)$）。在系统 ZT 之中，句法 C－协调性仍然存在，不再列出定理。

定理 10：（句法 Z－完全性定理）：系统 ZT 之中，A 与 ZA 总有一可证。

在定理 2 中有 $\vdash_{ZT} ZA$，所以定理 10 成立。系统 ZT 的 C－不完全性仍然存在，即存在 A 与 $\neg A$ 同时不可证。

定理 11：（句法可判定性定理）：对于一合式公式总可判定其是否为系统 ZT 的定理。

在以下我们证明了定理 13，即语义完全性之后，此定理推证即可解决。

定理 12：（语义协调性定理）：系统 ZT 之中，若 $\vdash_{ZT} R$，则 $V(R,Z)=1$。大多数公理的永真性在系统 Z 之中已经验证，$A \rightarrow ZA$ 相对于超越世界的永真性也是显而易见的。另外，代入规则与规则 MP 皆具备保真性，所以定理 12 成立。

定理 13：（语义完全性定理）：在系统 ZT 之中若 $V(R,Z)=1$，则 $\vdash_{ZT} R$。

证：在系统 ZT 中可以推证 ZB 和 $A \vee \neg A$ 皆为定理；进一步可知：$ZB \leftrightarrow A \vee \neg$ 也是 ZT 的定理。

经典系统中的等值替换定理在系统 ZT 中仍成立，因 $A \leftrightarrow B \vdash_{ZT} ZA \leftrightarrow ZB$（对照经典替换定理证明过程，并参见注释①中关于定理 6 的证明）。

因此，系统 ZT 中任一含算子 Z 的公式，全都可以替换成只含经典联结词的公式，而 ZT 中不含 Z 的公式都是经典系统公式。我们记系统 ZT 的公式为 $R(Z)$，根据 $ZB \leftrightarrow A \vee \neg A$，替换后的公式记为 $R(\neg)$，显然 $R(Z) \leftrightarrow R(\neg)$。

若 $V(R(Z),Z)=1$，则 $V(R(\neg),Z)=1$；

若 $V(R(\neg),Z)=1$，则 $\vdash_{ZT} R(\neg)$（经典系统完全性）；而 $R(Z) \leftrightarrow R(\neg)$；

∴若 $V(R(Z),Z)=1$，则 $\vdash_{ZT} R(Z)$。证毕。

（另外，陈晓平老师按他证明系统 Z 的完全性的思路，给出了另一种证明方法。参见注释②的补证，不难得出此结果）。

以上其他定理较易证明，在此从略。

从定理 8 和定理 9 可知，系统 ZT 不仅是独立语义超协调的，而且是句法超协调的，故可得：

定理 14：系统 ZT 是一超协调系统。（根据定义 5）

三、超协调系统的哲学意蕴及其现实意义

在经典逻辑系统中，句法的不协调性等价于一切命题都是系统的定理。在系统 Z 和 ZT 中，一方面，对于经典不协调性这种等价仍然成立；另一方面，对于超协调性，这种等价不再成立。这是因为，对于经典矛盾（C－矛盾）即 A 和 $\neg A$，有"邓斯－斯各特定理"即：

(1) $A, \neg A \vdash_{ZT} B$

而对于辩证矛盾（Z－矛盾）即 A 和 ZA，此定理演变成：

(2)A,ZA $\vdash_{ZT}$ ZB

(1)与(2)的不同之处在于,(1)中的B代表任何命题,而(2)中的ZB不能代表所有的命题。一个明显的事实是,ZB不能代表B。(参见注①中关于定理5的证明)。

对于任一系统而言,若一切命题皆可证,那么它什么也不能说明;它与一切皆不可证一样,是一个无用的系统。(1)和(2)的区别表明,尽管经典不协调性(C－不协调)可以导致这种情况,但是,超协调性(Z－不协调)并不导致这种情况。这就从逻辑上保证了,超协调系统不是无意义的系统,辩证矛盾不是无价值的矛盾。下面我们就从正面简单地谈谈超协调系统Z和ZT意义及价值。

一、超协调系统Z和ZT,都是在超越世界语义上建立起来的。超越世界是相对于原世界定义的,它在原世界之外;选择不同的原世界,可以得到不同的超越世界。以数系为例,我们若把有理数系选作原世界,那么,无理数系、虚数系及其以后的未知数系都应是超越世界的内容;若把实数系选作原世界,那么超越世界只包含虚数系及其以后的未知数系,而无理数系又成为原世界的内容。

二、我们认为任何命题为真是有其一定的领域,为假也有其一定的领域,真命题不常真,假命题不常假。基于这种思想,超越世界是为任何命题的超越形态虚设一个常真的领域,这种虚设对于我们探索新知,具有重大的理论意义。

三、原世界总是已知领域,是已建构的,是有限的。超越世界可能含有已知内容,而总含有无限的未知内容。对于这个潜在的未知领域,人类只能一点一点地开发。

四、超越世界是与超越谱系相对应的,即其中含有一簇依次超越的子世界。原世界与超越世界之间,充满着辩证矛盾性。超越谱系“V_0,ZV_0,ZV_1…”是按时序建构的一系列命题。已建构的命题可看作原世界内容;而以后无限的未建构命题,都可看作超越世界内容。

五、超越世界可转化为原世界。假设在超越谱系之中V_0、ZV_0是目前已建构的命题,而ZV_1、ZV_2、ZV_3… 都是未建构的命题。这时V_0、ZV_0可看作原世界内容。若过一段时间,随着认识的发展,ZV_1、ZV_2又构造出来,这时V_0、ZV_0、ZV_1、ZV_2都可看作原世界内容,而ZV_3、ZV_4…就是超越世界内容。总之,随着人类认识发展,超越世界不断转化为原世界,原世界不断得到扩展。

六、公理A→ZA的引入,使系统ZT放弃了句法Z－协调性,却获得了句法Z－完全性。这种完全性的获得,使得一批未知的命题成为系统ZT的定理,如:ZV_2、ZV_3…等。未知命题在超协调系统中成为定理,这有重大的现实意义。因为逻辑学的最终目的,在于帮助人们从已知的内容去发现新的知识。

七、超越世界为已有知识的对立面世界提供了一个生长点。对立面一旦有了生长点,它就会慢慢地萌发而成为新知。弱矛盾律A→ZA表明:如果A成立,那么,ZA一定在超越世界中成立。从科学发展来看,情况正是如此。如:“一个数的平方是正数”在实数系中成立,则“一个数的平方是负数”这将在超越世界中成立,这个超越世界就是虚数系。在爱因斯坦相对论理论中,“光速是一切物质运动速度的极限”、“超距作用是不可能的”是有效的,那么,一定存在一个超越世界,在其中,“物质的运动速度将大于光速”、“存在着超距作用”也是有效的。这个超越世界指一定的理论体系(也可指真实的宇宙)。不过,这个超越世界目前尚未被人们建构出来。(我在事后得知,切林柯夫已发现媒质中的超光速效应,而量子力学背后暗含着类似于“超距作用”的假说)。

八、超协调系统Z和ZT揭示了一个无限的潜在的领域。它虽然具有一种激进性,但它却反映了某种客观规律。根据这种理论,某些科学发现的示向性原则将会变得明朗起来。从而使人们更自觉、更积极、更有效地向未知领域进军,进而推动科学事业更为迅速地向前发展。

(本文初稿得到武汉大学哲学系桂起权、陈晓平二位老师的审阅和指正;本文采纳了他们许多重要的建议。在此,笔者谨向他们致以诚挚的谢意。)

注 释:

① 张金成:《对辩证逻辑形式化的研究》,载《武汉大学学报》(社会科学版)1992年第6期。

② 陈晓平、桂起权:《辩证逻辑形式化的新进展》,同上。

(本文责任编辑 彭昌林)